

1. Az 1958. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött 2. feladat a következő volt¹:

Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy

$$x^2 + ax + b$$

csak akkor állíthat elő végtelen sok egész x értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

Mind a két közölt megoldás lényegesen kihasználja, hogy a polinom másodfokú. Adható azonban a feladatnak olyan megoldása is, amelyikben a polinom fokszáma nem játszik lényeges szerepet, s így alkalmas a következő lényegesen általánosabb tétel bizonyítására:

Ha egy n -ed fokú egész együtthatós polinomban a legmagasabb fokú tag együtthatója 1 és a polinom értéke végtelen sok egész helyen egész szám n -edik hatványa, akkor a polinom egy egész együtthatós elsőfokú polinom n -edik hatványa.

2. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha a tétel állítása nem teljesül, akkor egy megadható korlát fölött minden egész helyen a polinom értéke két szomszédos egész szám n -edik hatványa közé esik, így nem lehet egész szám n -edik hatványa.

Ennek bizonyítása a következő megjegyzésen fog alapulni: Minden

$$g(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_{k-1}x + c_k$$

polinomhoz megadható egy K korlát úgy, hogy minden K -nál nagyobb x értékre már $g(x)$ olyan előjelű, mint c_0 .

Állításunk magától értetődő, ha $k = 0$, azaz $g(x)$ állandó. Ha $k \geq 1$, akkor biztosan teljesül az állítás, ha x pozitív és c_0x^k abszolút értéke nagyobb, mint a többi tagok összegének az abszolút értéke, ez pedig nem nagyobb, mint a tagok abszolút értékének összege:

$$|c_1| x^{k-1} + |c_2| x^{k-2} + \dots + |c_{k-1}| x + |c_k|.$$

Ha csak 1-nél nagyobb x értékekre szorítkozunk, tehát K értéke legalább 1, akkor ezt az összeget tovább növeljük (vagy legalább is nem csökkentjük, ha ugyanis $k = 1$) minden együttható szorzójául x^{k-1} -t írva. Biztosan teljesül tehát állításunk, ha $|c_0| x^k$ az így növelt összegnél is nagyobb, azaz ha

$$|c_0| x^k > (|c_1| + |c_2| + \dots + |c_{k-1}| + |c_k|) x^{k-1},$$

azaz, ha

$$x > \frac{|c_1| + |c_2| + \dots + |c_{k-1}| + |c_k|}{|c_0|}.$$

Ha tehát K gyanánt az itt nyert szám és 1 közül a nagyobbat választjuk, akkor teljesül állításunk.

3. A bizonyítandó állításban $x + d$ alakú kifejezés n -edik hatványáról van szó. Ezt a hatványt polinom alakba írva a legmagasabb fokú tag x^n lesz; az $n - 1$ -ed fokú tagot úgy kapjuk, ha az

$$(x + d)^n = (x + d)(x + d) \dots (x + d)$$

szorzatban minden lehető módon egy tényezőből a d -t, a többiből az x -et szorozzuk össze; mivel n -féleképpen választhatjuk azt a tényezőt, amelyikből d -t vesszük ki, így a polinom $n - 1$ -ed fokú tagja ndx^{n-1} :

$$(x + d)^n = x^n + ndx^{n-1} + \dots$$

(A további tagok együtthatója is könnyen megadható volna, de erre nem lesz szükségünk.)

4. Legyen most már

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

egy egész együtthatós polinom. Megmutatjuk, hogy ha ez nem egy elsőfokú egész együtthatós kifejezés n -edik hatványa, akkor legfeljebb véges sok egész helyen lehet az értéke egész szám n -edik hatványa.

Legyen d az az egész szám, amelyre $nd \leq a_1 < n(d + 1)$. ekkor

$$f(x) - (x + d)^n = (a_1 - nd)x^{n-1} + \dots = f_1(x)$$

egy legfeljebb $n - 1$ -ed fokú polinom (lehet, hogy az $n - 1$ -ed fokú tag együtthatója és esetleg néhány további együttható is 0), de nem tűnhet el minden együttható, ha $f(x) \neq (x + d)^n$.

Tegyük fel először, hogy $f_1(x)$ legmagasabb fokú ténylegesen fellépő tagjának az együtthatója pozitív, akkor képezzük az

$$f(x) - (x + d + 1)^n = (a_1 - n(d + 1))x^{n-1} + \dots = f_2(x)$$

¹¹ Középiskolai Matematikai Lapok, új sorozat 17 (1958), 68-69 old.

polinomot. Itt d megválasztása szerint az $n - 1$ -ed fokú tag együtthatója negatív, és ez a tag a polinom legmagasabb fokú tagja.

A 2. pontban bizonyított segédteétel szerint van olyan K_1 és K_2 állandó, hogy

$$f_1(x) > 0, \quad \text{ha } x < K_1, \quad f_2(x) < 0, \quad \text{ha } x > K_2.$$

Jelöljük K_1 és K_2 közül a nagyobbat K -val, akkor minden K -nál nagyobb x -re

$$f_1(x) = f(x) - (x + d)^n > 0, \quad f_2(x) = f(x) - (x + d + 1)^n < 0,$$

azaz

$$(x + d)^n < f(x) < (x + d + 1)^n.$$

Így a most tárgyalt esetben minden K -nál nagyobb egész x értékre $f(x)$ két egymás utáni egész szám n -edik hatványa közé esik, tehát nem lehet egész szám n -edik hatványa.

5. Ha $f_1(x)$ legmagasabb fokú tagjának az együtthatója negatív, akkor az

$$f(x) - (x + d - 1)^n = (a_1 - n(d - 1))x^{n-1} + \dots = f_3(x)$$

polinomot képezzük, ebben a legmagasabb az $n - 1$ -ed fokú tag és ennek az együtthatója d megválasztása szerint pozitív.

Így az előbbi megfontoláshoz hasonlóan meg tudunk ebben az esetben egy olyan K értéket adni, amelynél nagyobb x -értékekre

$$f_1(x) = f(x) - (x + d)^n < 0, \quad f_3(x) = f(x) - (x + d - 1)^n > 0,$$

tehát

$$(x + d - 1)^n < f(x) < (x + d)^n.$$

Ebben az esetben sem lehet tehát a K -nál nagyobb egész értékekre $f(x)$ értéke egy egész szám n -edik hatványa.

Azt nyertük tehát, hogy $f(x)$ értéke nem lehet végtelen sok pozitív egész x értékre egész szám n -edik hatványa, kivéve, ha $a_1 = nd$ és $f(x) = (x + d)^n$.

6. Végül a negatív egész x értékek esetét visszavezethetjük a már tárgyalt esetre. Ugyanis $f(x)$ negatív helyen vett értékei megegyeznek az $f(-x)$ polinom pozitív helyen felvett értékeivel és ha ezek valamelyike egész szám n -edik hatványa; akkor ugyanez áll az

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$$

polinomra is. Megfordítva, ha valamilyen x értékre $f^*(x)$ egy egész szám n -edik hatványa; akkor ugyanez áll az

$$f(x) = (-1)^n f^*(-x)$$

polinomra is.

Az előbbi megfontolás szerint $f^*(x)$ értéke nem lehet végtelen sok egész helyen egész szám n -edik hatványa, kivéve, ha $a_1 = nd$ és $f(x) = (x - d)^n$.

Ebben az esetben

$$f(x) = (-1)^n f^*(-x) = (-1)^n (-x - d)^n = (x + d)^n.$$

Az előző bekezdés végén megfogalmazott következtetésünk így pozitív egész értékek helyett minden egész x értékre érvényes. Ezzel bebizonyítottuk az 1. pontban kimondott tételt.