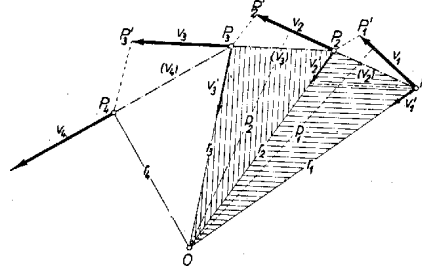


I. A TERÜLETI SEBESSÉG ÁLLANDÓSÁGA. A centrális mozgásokat az jellemzi, hogy a vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket ír le a térben, s ez a „területi elv” mértani okok miatt minden centrális mozgásra érvényes, mégpedig az erőtvény alakjától függetlenül!



Levezetés céljából induljunk ki abból a pillanattól, amikor az ábra szerint a bolygó tömegközéppontja (a következőkben: a mozgó pont) a vonzó O középponttól r_1 távolságra levő P_1 helyre érkezik v_1 sebességgel. Ha nem volna vonzó erő, akkor tehetetlensége következtében 1 mp múlva a P'_1 helyzetbe jutna, a vonzás miatt azonban ugyanezen idő alatt bizonyos v'_1 elmozdulás jön létre a centrum irányában, s így az első mp végére P_2 -be jut az eredményvonallal jelzett eredő v_2 sebességgel, s eközben az r_1 vezérsugár a vízszintes árnyékolású területet írja le.

Ha nem lenne vonzás, akkor a P_2 helyre érkezett pont megváltozott, v_2 sebességgel 1 mp múlva a P'_2 helyre kerülne, miközben azonban v'_2 sebességet nyer a centrum felé, s ennek következtében a második mp végére az eredő sebesség v_3 , a pont helyzete P_3 , a vezérsugár leírta terület pedig a függőleges árnyékolású háromszög lesz. Ezt az eljárást folytatva: a harmadik mp végén az eredő sebesség (v_4), a mozgó pont helyzete P_4 , a vezérsugár leírta terület pedig az árnyékolatlan $r_3 r_4 (v_4)$ háromszög lesz. A szerkesztésből mármint világosan láthatók a következők

1. Mindegyik vezérsugár súlyvonala egy balról nyitott $OP_1 P'_2$, illetve $OP_2 P'_3$ nagyobb háromszögnek, amelynek jobboldali zárt fele az előző mp-ben leírt területet, a vele egyenlő területű nyitott fele pedig a következő mp-hez való átmenetet képviseli.

2. Mivel az eredő sebességet paralelogramma-szerkesztéssel nyerjük, ennél fogva az egyes vezérsugarakhoz tartozó nyitott és zárt háromszögek egyenlő területűek, mert alapjuk közös, magasságuk pedig a párhuzamos eltolás közben nem változik s így a nyitott $\triangle$ -ek a következő mp-ben leírt területbe mennek át. *E $\triangle$ -eknek tehát csak az alakjuk különbözik, területük azonban ugyanakkora.*

Ha tehát most a v_1 , illetve v_2 sebességeket tekintjük alapnak, s a vonzó centrumból rájuk húzott merőlegeseket (a latin „perpendikuláris” szó kezdőbetűjéről) p_1 , illetve p_2 -vel jelöljük, akkor az említett $\triangle$ -ek területének egyenlősége miatt

$$p_1 v_1 = p_2 v_2,$$

vagy aránylat alakjában írva

$$v_1 : v_2 = p_2 : p_1,$$

tehát *a mindenkor sebességek fordítva aránylanak a vonzó központból rájuk húzott merőlegesekhez.*

A bolygó tehát a Napközben éri el, legnagyobb v_0 sebességét, amikor is a hozzá tartozó merőleges éppen a legrövidebb vezérsugár: $r_0 = a - c$, a legkisebb v_a sebesség viszont a naptávolnál (aphelium) jelentkezik, amikor a hozzá tartozó merőleges a leghosszabb vezérsugár: $r_a = a + c$. A kettő hányadosa, azaz

$$\frac{v_0}{v_a} = \frac{\text{napközeli sebesség}}{\text{naptávoli sebesség}} = \frac{a + c}{a - c},$$

hol az ellipszis fél nagytengelye a , lineáris excentricitása pedig c . Ezzel azután előkészítettük az utat a sebesség szélső értékeinek tényleges meghatározásához.

II. A SEBESSÉG SZÉLSŐ ÉRTÉKEI a területi- és az energia-elv segítségével határozhatók meg. Az utóbbi szerint a mozgási és helyzeti energia összege az egész mozgás folyamán állandó marad, vagyis

$$(1) \quad \frac{mv_0^2}{2} - \frac{kMm}{r_0} = \frac{mv_a^2}{2} - \frac{kMm}{r_a}$$

ahol k a tömegvonzás állandója, M a Nap, m pedig a bolygó tömege, a helyzeti energiát pedig azért vesszük – előjellel számításba, mert növekvő r esetén értéke csökken.

A területi elv szerint viszont

$$(2) \quad v_a r_a = v_0 r_0,$$

s így két egyenletünk van a két ismeretlen sebesség meghatározására. A második négyzetéből

$$(2') \quad v_a^2 = v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r_a^2}$$

s ezt (1)-be helyettesítve, v_0^2 -re mindjárt rendezve és kiemelve

$$v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_a^2} \right) = 2kM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_a} \right).$$

Közös nevezőre hozva

$$v_0^2 \left(\frac{r_a^2 - r_0^2}{r_a^2} \right) = \frac{2kM}{r_0} \left(\frac{r_a - r_0}{r_a} \right),$$

majd a zárójeles részeket a jobb oldalival egyszerűsítve

$$v_0^2 \frac{r_a + r_0}{r_a} = \frac{2kM}{r_0}$$

s ebből a keresett

$$v_0^2 = 2kM \frac{r_a}{r_0(r_a + r_0)}.$$

Mivel az ellipszis adataival kifejezve

$$r_a = a + c, \quad r_0 = a - c$$

ezeket helyettesítve

$$(3) \quad v_0^2 = \frac{kM}{a} \cdot \frac{a + c}{a - c}$$

alakban nyerjük a napközeli jelentkező sebesség négyzetét, amiből maga a sebesség egyszerű négyzetgyökvonással nyerhető.

A (3) értékét (2')-be helyettesítve: egyszerűsítés után a naptávolhoz tartozó sebességre vonatkozólag

$$v_a^2 = \frac{kM}{a} \cdot \frac{a - c}{a + c}.$$

Ezzel azután előkészítettük az utat a tetszés szerinti r vezérsugárhoz tartozó v sebesség meghatározására!

III. A SEBESSÉG ÁLTALÁNOS KIFEJEZÉSE szintén az energia-elv alapján történik a v_0 perihélium-sebesség felhasználásával az előbbihez hasonló lépésekben:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} - \frac{kMm}{r} &= \frac{mv_0^2}{2} - \frac{kMm}{r_0} \\ v^2 - \frac{2kM}{r} &= v_0^2 - \frac{2kM}{r_0}. \end{aligned}$$

Helyettesítve v_0^2 -nek (3) alatti kifejezését és v^2 -re rendezve, majd $2kM$ kiemelése után közös nevezőre hozva

$$v^2 = \frac{kM}{a} \cdot \frac{a + c}{a - c} + 2kM \left(\frac{r_0 - r}{r_0 r} \right).$$

Helyettesítve $r_0 = a - c$ értéket, majd kM kiemelése után közös nevezőre hozva

$$v^2 = kM \left[\frac{a + c}{a(a - c)} + 2 \frac{a - c - r}{(a - c)r} \right] = kM \frac{ar + cr + 2a^2 - 2ac - 2ar}{a(a - c)r}.$$

A számláló harmadik és negyedik tagját $2a$ kiemelése után előre hozva, s a lehetséges összevonások után a közös r tényezőt – jellel kiemelve

$$v^2 = kM \frac{2a(a - c) - r(a - c)}{a(a - c)r},$$

majd a törtet két tagra bontva, a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után végleges

$$(4) \quad v^2 = kM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

aránylag egyszerű alakban nyerjük a bolygómozgás sebességének általános képletét.

IV. ALKALMAZÁS A MESTERSÉGES BOLYGÓK PROBLÉMÁIRA.

1. A *körsebesség* akkor szerepel, amikor a vezérsugár $r = a$ állandó. Ekkor a (4) képlet zárójeles részének értéke $2/r - 1/r = 1/r$ lesz s így a körsebesség

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{kM}{r}}$$

alakban állítható elő, hol r a körpálya sugarát jelenti. Ha tehát a vonzó centrumtól r távolságban s rá merőlegesen kilövünk egy testet az (5) sebességgel, akkor ellenállásmentes térben körpályán fog keringeni. Egy teljes T keringési idő alatt a v sebességgel megtett út $2r\pi$ lesz, s így a $Tv = 2r\pi$ összefüggésből (Kepler III. törvényének megfelelően!)

$$(6) \quad T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{kM}} \cdot \sqrt{r} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{kM}}$$

Ezt a kifejezést igen érdekes alakra hozhatjuk annak megfontolásával, hogy a tömegegységre ható $\frac{kM}{r^2}$ erő tulajdonképpen az r távolságban jelentkező g gravitációs gyorsulást jelenti, ha tehát a (6) kifejezésben szereplő tört számlálóját és nevezőjét egyaránt osztjuk r^2 -tel, akkor a teljes T periódus új kifejezése

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

oly ideális inga teljes lengésidejével egyenlő, melynek hosszúsága a vonzó centrumtól számított r távolság, g pedig a kérdéses helyen uralkodó gyorsulás.

Egyébként a körsebesség egészen elemi úton is levezethető annak belátásával, hogy a körmozgás fenntartásához szükséges mv^2/r centripetális erőt tulajdonképpen az m tömegnek mg súlya képviseli s így az

$$\frac{mv^2}{r} = mg$$

feltételi egyenletből $v^2 = rg$, illetve

$$(7) \quad v = \sqrt{rg}.$$

Egyébként az (5) képlet is ugyanerre az alakra hozható, mert a gyökös rész számlálóját és nevezőjét r -rel szorozva

$$v = \sqrt{r \cdot \frac{kM}{r^2}},$$

már pedig előző megfontolásaink szerint a gyök alatti tört éppen a g gyorsulást jelenti, mely itt általánosabb értelemben veendő.

Mivel *Newton* törvénye értelmében a nehézségi erő terében jelentkező gyorsulások fordítva arányosak a vonzó központtól számított távolság négyzetével, ennél fogva a Föld sugarát R , a felszíni gyorsulást pedig G betűvel jelölve (mert ott a legnagyobb!) a

$$\frac{g}{G} = \frac{R^2}{r^2}$$

összefüggésből nyert

$$g = G \frac{R^2}{r^2}$$

értéket (7)-be helyettesítve

$$v = \sqrt{r \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot G} = \sqrt{\frac{GR^2}{r}}$$

alakban nyerjük a körsebességet egy tetszőszerinti r távolságra nézve. Ha ezt egyszerűség kedvéért a Föld sugarának többszöröseiben fejezzük ki, akkor $r = nR$ helyettesítéssel más alakban

$$(8) \quad v = \sqrt{\frac{GR^2}{nR}} = \sqrt{\frac{RG}{n}}$$

lesz a körsebesség kifejezése. Közelítő számításoknál

$$G = 10 \text{ m/sec}^2 = 10 \cdot \frac{1}{1000} \text{ km/sec}^2 = \frac{1}{100} \text{ km/sec}^2,$$

a Föld sugara 6400 km (a pontos 6370 helyett!), tehát ezek helyettesítésével

$$(9) \quad v = \sqrt{\frac{64}{n} \text{ km}^2/\text{sec}^2} = 8 \text{ km/sec} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Mivel a Föld felszínére nézve $n = 1$, ennél fogva 8 km/sec vízszintes kilövési sebesség elegendő lenne a körpálya előállítására légüres térben. A sebesség (8) kifejezését a (6) baloldalába helyettesítve a keringésidő számára (a közös gyökjel alá hozatal és egyszerűsítés után) a

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2nR\pi}{\sqrt{RG}}\sqrt{n} = 2\pi\sqrt{\frac{Rn^3}{G}} = 2\pi\sqrt{\frac{6400 \text{ km } n^3}{10^{-2} \text{ km/sec}^2}} = 6,28 \text{ sec} \cdot 800\sqrt{n^3}$$

kifejezést nyerjük, melynek numerikus része átszámítva 84 percet jelent s így végleges alakban

$$(10) \quad T = 84 \text{ perc} \cdot \sqrt{n^3}.$$

Mivel a Föld felszínén $n = 1$, ennél fogva itt $T = 84$ perc, vagyis ellenállásmentes mozgás esetén a vízszintesen kilőtt test ennyi idő alatt kerülné meg a Földet. Az első mesterséges holdaknál 96 perc körüli keringési idő adódott, mert a vízszintes kilövés nem az $n = 1$ értéknél, hanem valamivel magasabbról történt az utolsó rakéta-lépcső segítségével!

Ha a Föld felszínére vonatkozó értékeket az $n = 1$ miatt kis 1-es indexszel jelöljük, akkor a (9) és (10) értelmében $n = 4$ esetben $v_4 = \frac{v_1}{2}$ és $T_4 = 8 T_1$. Az utóbbit könnyű belátni abból, hogy most a megteendő út négyszeres, a sebesség ellenben felakkor, tehát a teljes körpálya leírásához tényleg 8-szor akkora idő szükséges.

Hogy említett képleteink milyen jó közelítést adnak, kitűnik abból, hogy $n = 64$ esetben $v_{64} = 8/8 = 1$ km/sec és $T_{64} = 84 \text{ perc} \cdot 512 = 43\,008 \text{ perc} = 29,9 \text{ nap}$, mert $\sqrt{64^3} = \sqrt{8^6} = 8^3 = 512$ és 1 nap = 1440 perc. Mivel a Hold távolsága a Föld középpontjától valamivel több, mint 60 R, kerületi sebessége 1,023 km/sec, keringési ideje pedig 27,3 nap, ezek az adatok jól egyeznek az előbbi eredményekkel, mert a kérdéses nagyobb távolságból a Hold felé közeledve: a sebességnek (a megnövekedett vonzás miatt!) növekednie s emiatt a keringési időnek csökkennie kell.

2. A *szökési vagy határsebesség* az általános (4) képletből $a = \infty$ helyettesítéssel nyerhető $v = \sqrt{\frac{2kM}{r}}$ alakban, mely a körsebességnek $\sqrt{2}$ -szerese. Ekkor az ellipszis nagytengelye végtelenné válik, s így a pálya parabolába megy át. Ezt másként kritikus sebességnek is nevezik, mert ennél a test elhagyva a vonzó centrum erőterét, a végtelenbe távozik, vagyis mintegy kiszökik a vonzás hatása alól.

A következőkben néhány érdekes szökési sebességet közlünk:

1) A *Föld mint vonzó centrum esetén* a felszínre vonatkozólag $v = v_1 \sqrt{2} = 11,2$ km/sec, a Holdnál valamivel nagyobb távolságban $v_{64} = v_{64} \sqrt{2} = 1,41$ km/sec, $n = 4 \cdot 10^4$ esetben, vagyis valamivel több, mint 1,5-szeres naptávolságban a $v = 8/200$ km/sec = 4/100 km/sec = 40 m/sec körsebesség miatt mindössze $v = 1,41 \cdot 40$ m/sec = 56,4 m/sec lenne a kritikus sebesség.

2) A *Nap, mint vonzó centrum esetén*, mivel félátmérője $6,95 \cdot 10^{10}$ cm, $k = 6,66 \cdot 10^{-8} g^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ a gravitációs állandó, $M = 1,98 \cdot 10^{33} g$ a Nap tömege, $kM = 1,337 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$, tehát a Nap felszínére vonatkozó szökési sebességre nézve

$$v_{\text{Nap}}^2 = \frac{2,674 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}}{6,95 \cdot 10^{10} \text{ cm}} = 384748,2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2},$$

amiből a gyökvonás elvégzése után

$$v_{\text{Nap}} = 620,3 \text{ km/sec}.$$

3) Végül még arra vagyunk kíváncsiak, hogy a *Naptól* $150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$ távolságra mekkora lenne a szökési sebesség? Képletünk szerint ekkor

$$v^2 = \frac{2,674 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}}{1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}} = 1783 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$$

amiből

$$v = 42,2 \text{ km/sec}.$$

Mivel Földünk nem egészen 30 km/sec átlagos sebességgel végzi keringését a Nap körül, tehát igen messze vagyunk a kritikus sebességtől, s így nem kell félnünk attól, hogy el kell távoznunk ismeretlen csillagvilágok felé, ahová való utunkban a megfagyás veszdelme fenyegetné az emberiséget!