

Haladók (II. osztályosok) verseny

1. feladat Egy szám két olyan tényezőre bontható, melyek különbsége 6, negyedik hatványaik összege 272. Melyik ez a szám?

I. megoldás: Ha a kisebbik tényezőt x -szel jelöljük, akkor a másik tényező $x + 6$, és a követelmény szerint

$$(1) \quad x^4 + (x + 6)^4 = 272.$$

Szimmetrikusabbá válik azonban egyenletünk, ha a tényezők számtani közepét választjuk ismeretlennek. Ezt z -vel jelölve a két tényező $z - 3$ és $z + 3$, így

$$(z - 3)^4 + (z + 3)^4 = 272,$$

és rendezve z páratlan kitevős hatványai kiesnek:

$$z^4 + 54z^2 - 55 = 0,$$

vagyis z^2 -ben másodfokú egyenletre jutunk. Ennek gyökei $z_{1,2}^2 = 1$ -ből $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$, a másik, $z_{3,4}^2 = -55$ gyökből z_3 és z_4 -re nem kapunk valós értéket. A z_1 gyökhöz tartozó tényezőpár -2 és $+4$, a z_2 -höz tartozó -4 és $+2$, a szorzat mindkét esetben -8 , ez az egyetlen (valós) szám, amely feladatunk követelményeinek megfelelő. Valóban $(-2)^4 + 4^4 = (-4)^4 + 2^4 = 272$.

II. megoldás: Jelöljük a keresett számot n -nel, a feladat szerinti tényezőit x -szel és y -nal. Ekkor, feltéve, hogy $x > y$,

$$(2) \quad x - y = 6,$$

$$(3) \quad xy = n,$$

$$(4) \quad x^4 - y^4 = 272.$$

Innen közvetlenül n -re is kaphatunk egyenletet, ha (3)-at és (4)-et $x(-y) = -n$, $x^4 + (-y)^4 = 272$ alakban írva észrevesszük, hogy egyenleteink bal oldalán x és $-y$ szimmetrikus függvényei állnak. Így (ugyanis várható, hogy a (2)-ből adódó

$$(5) \quad [x + (-y)]^4 = 6^4 = 1296$$

egyenlet bal oldalát, amely szintén szimmetrikus függvénye x és $-y$ -nak, lehet úgy alakítani, hogy benne csak (2), (3) és (4) bal oldala szerepeljen. Valóban, kifejtés után

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 - (x^4 + y^4) - 4(x - y)^2xy - 2(xy)^2 = 1296,$$

tehát

$$272 - 4 \cdot 6^2n - 2n^2 = 1296, \quad n^2 + 72n + 512 = 0,$$

és innen $n_1 = -8$, $n_2 = -64$.

Minthogy azonban (2)-ről (5)-re áttérve nem ekvivalens átalakítást végeztünk, ki kell próbálnunk, hogy a kapott számok kielégítik-e a feladat feltételeit. Evégett meg kell határoznunk az x , y tényezőket is. Ezeket (2) és (3)-ból számíthatjuk ki. n_1 -gyel ugyanarra a két tényezőpárra jutunk, mint az I. megoldásban, n_2 -höz pedig nem tartozik (valós) tényezőpár, ezt tehát nem tekinthetjük megoldásnak.

Megjegyzés. A versenyzők többsége *indokolatlanul* feltételezte, hogy a tényezők egész számok, ezekre azután (1), ill. (4)-ben végzett próbálgatással rá is jutott. Volt, aki csak azt tételezte fel, hogy a tényezők racionálisak, és kimutatta, hogy (ebben az esetben) a tényezők egész számok, továbbá, hogy a feladat túlhatározott, amennyiben a (2) egyenlet felesleges, mert 272 csak egyféleképpen írható két egész szám negyedik hatványának összegeként. – Ámde a feladat szerint sem a két tényezőnek, sem magának a keresett szorzatnak nem kell még racionálisnak sem lennie! Tekintsünk két ellenpéldát. (2) és (3)-at változatlanul hagyva legyen pl. a tényezők negyedik hatványainak összege a kitűzött feladattól eltérően: $x^4 + y^4 = 386$; ekkor az előzőhöz hasonló számítással $x = \sqrt[4]{2} + 3$, $y = \sqrt[4]{2} - 3$, $n = -7$ adódik, tehát a keresett szám racionális, de a tényezők irracionálisok. Ha pedig (2) és (3)-at ismét meghagyva $x^4 + y^4 = 200$, akkor $x = \sqrt{\sqrt{748} - 27} + 3$, $y = \sqrt{\sqrt{748} - 27} - 3$, $n = \sqrt{748} - 36$, tehát a tényezőkkel együtt a keresett szám is irracionális.

2. feladat. Jelentsen a , b , c három olyan pozitív számot, amelyek közül kettő-kettőnek az összege legfeljebb 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c - ab - bc - ca \leq \frac{1}{2}(1 + a^2 + b^2 + c^2).$$

Megoldás: A kettős egyenlőtlenség részeit külön-külön bizonyítjuk mindkét esetben annak megmutatásával, hogy a jobb és bal oldal különbsége nem lehet negatív. – Valóban, az első egyenlőtlenség jobb és bal oldalának különbsége így írható:

$$(2) \quad a(1 - b - a) + b(1 - c - b) + c(1 - a - c).$$

A feltétel szerint

$$(3) \quad a + b \leq 1, \quad b + c \leq 1, \quad c + a \leq 1,$$

így

$$(4) \quad 1 - b - a \geq 0, \quad 1 - c - b \geq 0, \quad 1 - a - c \geq 0,$$

és ezeket rendre a pozitív a , b , c -vel szorozva és összeadva a bal oldalon (2)-t, a nem nagyobb jobb oldalon pedig 0-t kapunk. Ezzel (1) első részét bebizonyítottuk.

(2) akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha (4)-ben, és ezért már (3)-ban is mind a három helyen az egyenlőségi jel érvényes. Egyenlőségi jellel (3)-ban egyenletrendszer áll előttünk a , b , c -re; megoldása

$$(5) \quad a = b = c = \frac{1}{2},$$

ez a szükséges és egyben elegendő feltétele annak, hogy (1) első részében egyenlőség álljon fenn.

(1) második része jobb és bal oldalának különbségéről könnyen észrevehetjük, hogy egy teljes négyzet fele:

$$\frac{1}{2}(1 + a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) + (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}(1 - a - b - c)^2,$$

tehát valóban nem lehet negatív. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség második része is helyes. – A két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha a négyzet alapja 0, vagyis

$$(6) \quad a + b + c = 1.$$

Minthogy (5) és (6) egyidejűleg nem állhat fenn, azért a , b , c -nek nincs olyan értékrendszere, amely mellett (1)-ben egyidejűleg mindkét helyen az egyenlőség jele volna érvényes.

Megjegyzések. 1. Az utóbbi bizonyítás során nem használtuk ki a (3) feltételeket, sőt az a , b , c számok pozitívágát sem, ezért (1) második része a , b , c -nek bármely értékrendszere mellett fennáll. (Székely Jenő észrevétele.)

2. Más irányú általánosítása (1) második részének: tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokra

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_2 a_n + a_3 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n) \leq \frac{1}{2}(1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Bizonyítása ugyanúgy történhet, ahogyan (1) második részét bizonyítottuk. (Fritz József dolgozatából.)

3. Az egyenlőtlenség első részének bizonyítását is átvihetjük 3 helyett bármilyen $n \geq 2$ számú tagra. Ha ugyanis $a_1, a_2, \dots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül kettő-kettőnek az összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\{a_1[(1 - a_1 - a_2) + \dots + (1 - a_1 - a_n)] + a_2[(1 - a_2 - a_1) + \\ &\quad + (1 - a_2 - a_3) + \dots + (1 - a_2 - a_n)] + \dots + a_n[(1 - a_n - a_1) + \\ &\quad + \dots + (1 - a_n - a_{n-1})]\} = \frac{n-1}{2}[(a_1 + \dots + a_n) - \\ &\quad - (a_1^2 + \dots + a_n^2)] - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) \end{aligned}$$

és innen átrendezéssel a következő általánosítást nyerjük:

$$\frac{n-1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n).$$

4. A kimondott általánosítások n -nek bármely $n \geq 2$ értékére fennállanak, vagyis n minden olyan értékére, amely mellett az egyenlőtlenségeknek egyáltalán értelmük van.

5. Összefoglalva a 2. és 3. általánosítást az (1) kettős egyenlőtlenség következő általánosítását nyertük: Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ olyan pozitív számok, amelyek közül bármelyik kettőnek összege legfeljebb 1, akkor

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2}(a_1^2 + \dots + a_n^2) &\leq \frac{n-1}{2}(a_1 + \dots + a_n) - (a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + a_1^2 + \dots + a_n^2) + \frac{n-3}{2}(a_1 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

A tett feltevés az első rész fennállásának elegendő, de nem szükséges feltétele már a feladatban szereplő $n = 3$ esetben sem; pl. $n = 3$, $a_1 = 1/4$, $a_2 = 1/3$, $a_3 = 3/4$ esetében az egyenlőtlenség első része fennáll, bár $a_2 + a_3 > 1$. – A második rész $a_1, a_2, \dots, a_n$ bármely értékei mellett fennáll.

6. Az (1) második része így is bizonyítható: nemnegatív számok mértani közepe nem nagyobb számtani közepüknél. Ezt az 1 és $(a + b + c)$ pozitív számokra alkalmazva

$$(7) \quad \sqrt{1(a+b+c)} \leq \frac{1+(a+b+c)}{2}.$$

Itt mindkét oldal pozitív, ezért a bal oldal négyzete sem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$a+b+c \leq \frac{1}{4}(1+a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{2}(a+b+c) + \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Innen pedig, 2-vel szorozva és a négyzetes tagok kivételével minden tagot a bal oldalra átvive (1) második részét kapjuk. – (7)-ből is látható, hogy egyenlőség csak (6) fennállása esetén következik be.

3. feladat. Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja felezi az alaphoz tartozó magasságot. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az alapot és a két szár meghosszabbítását érintő kör sugara.

I. megoldás: A keresett ABC háromszög ($AB = AC$) alakját megszerkeszthetjük annak alapján, hogy a körülírt kör középpontja a feltételnek megfelelő háromszögekben a szimmetriatengely alap felőli negyedelő pontjával esik egybe. Ez így látható be: legyen az alap felezőpontja A_1 , a B -ből húzott magasság (amely átmegy az AA_1 szakasz M felezőpontján) messe AC -t D -ben, az A_1 -ből AC -re bocsátott merőleges talppontja legyen E . Mivel MD az AA_1E háromszögnek, A_1E pedig a BCD háromszögnek középvonala, ezért $AD = DE = EC$. Az AC oldal F felezőpontja tehát DE -t is felezi, így az F -ben AC -re emelt merőleges, – amelynek AA_1 -gyel való metszéspontja a háromszög köré írt kör O középpontja – az A_1EDM derékszögű trapéz középvonala, s így felezi az A_1M szakaszt. Ezzel állításunkat igazoltuk.

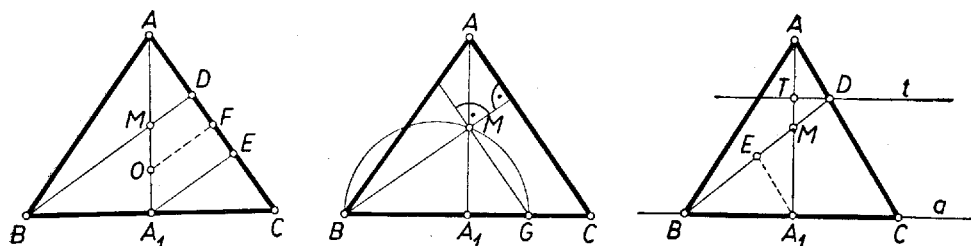
Ennek alapján a keresett háromszöghöz hasonló úgy szerkeszthetünk, hogy tetszőlegesen felvesszük az AA_1 magasságot, ezen megszerkesztjük az M felező- és az O negyedelő pontot. Az O körül OA sugárral írt kör metszi ki az A_1 pontban AA_1 -re állított merőlegesből a háromszög B és C csúcsát.

Az ABC háromszögnek a kívánt méretre nagyítását pl. úgy végezhetjük, hogy az adott sugárral megrajzoljuk a „hozáírt” kört, majd ehhez az ABC háromszög oldalaival párhuzamos érintőket úgy szerkesztünk, hogy a kör a keletkezett háromszög alapját és szárainak meghosszabbítását érintse.

Megjegyzés. Ehhez a szerkesztéshez jutunk az Euler-egyenes tulajdonságainak felhasználásával is, de lényegében erre vezet az is, ha felhasználjuk, hogy a magassági pontot az oldalakra tükrözve a tükörkép a körülírt körre esik. Ismeretes ugyanis, hogy a háromszög M magassági pontja, S súlypontja – amely mindhárom súlyvonalnak az oldal felőli harmadolópontja – és körülírt körének O középpontja ebben a sorrendben egy egyenesen, a háromszög Euler-egyenesén van, ami egyenlő szárú háromszögnél egybeesik a szimmetriatengellyel, és $MS = 2SO$. – Második észrevételünk alapján pedig az AA_1 szakasz M felezőpontjának A_1 -re való $\bar{M}$ tükörképét véve $\bar{A}\bar{M}$ -ben a körülírt kör egy átmérőjét nyertük.

II. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, és messe az M -en átmenő, AC -vel párhuzamos egyenes BC -t G -ben. Ekkor MG az AA_1C háromszögnek középvonala, így $CG = GA_1$, másrészt MG merőleges MB -re. – Ennek alapján a tetszőlegesen felvett BC alapon megszerkesztjük az A_1 felező és G negyedelő pontot, BG mint átmérő fölé (Thalész-) félkört írunk, ebből az A_1 -ben BC -re emelt merőlegessel kimetsszük M -et, végül A_1 -et M -re tükrözve kapjuk a keresetthez hasonló ABC háromszög hátralevő A csúcsát.

III. megoldás: Legyen egy tetszés szerinti ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$) a BC alap felezőpontja A_1 és az AA_1 szakasz felezőpontja M . Meg fogjuk mutatni, hogy a BM egyenes és az AC oldal D metszéspontjából AA_1 -re bocsátott merőleges T talppontja az AA_1 szakasz A felőli harmadoló pontja, függetlenül a háromszög alakjától. – Ezt tudva a keresett háromszög alakja megszerkeszthető. Egy a egyenes egy A_1 pontjában AA_1 merőlegest szerkesztünk, és megszerkesztjük AA_1 -nek az A felőli T harmadoló pontját. Ekkor az összes olyan ABC egyenlő szárú háromszögekben, amelyeknek alapja az a egyenesen van, az alap végpontjait AA_1 felező pontjával összekötő egyeneseknek a szemközti oldallal való metszéspontja a T -ben AA_1 -re merőlegesen húzott t egyenesen van.

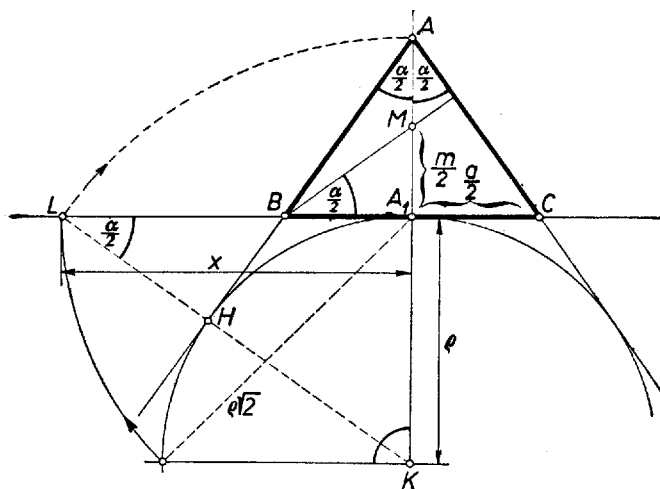


Ennek kell azt a D_0 pontját kikeresnünk, amelyre AD_0 és BD_0 vagy azt, amelyre AD_0 és CD_0 merőlegesek, az ilyen pontokat pedig az AM szakasz mint átmérő fölé rajzolt (Thalész-) kör metszi ki t -ből. Legyen a kör és az egyenes két metszéspontja D_0 és D_0^* ; ezek AA_1 -re szimmetrikusan helyezkednek el, így mindkettőt összekötve A -val és az összekötő egyeneseket meghosszabbítva, amíg a -t metszik (mondjuk B -ben, ill. C -ben) egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ebben a B -t M -mel összekötő egyenes AC -t annak t -vel való metszéspontjában, vagyis D_0^* -ban metszi. Ez rajta van a Thalész-körön is, tehát BD_0^* az AC oldalra bocsátott magasság. Így valóban megszerkesztettük a keresett háromszög alakját – amennyiben a T pontra vonatkozó állításunk igaz.

Ennek igazolására húzzunk A_1 -ből párhuzamost AC -vel, messe ez BD -t E -ben. A_1E a BCD háromszög középvonala, s így E felezi a BD szakaszt. Másrészt EM és MD egyenlő, mert AMD és A_1ME háromszögek megfelelő oldalai, ezek pedig egybevágók, ugyanis AM és A_1M oldaluk egyenlő, M -nél levő szögek csúcsharminvok, A -nál és A_1 -nél levő szögek pedig váltószögek. – Ekkor azonban MD a BM szakasz harmadrésze, s így az A_1BM és TDM hasonló derékszögű háromszögekből (az M -nél levő szögek csúcsharminvok) nyerjük, hogy TM is harmadrésze A_1M -nek, tehát hatoda AA_1 -nek. Így A_1T kétharmada és AT harmadrésze AA_1 -nek, amint állítottuk.

IV. megoldás. Számítás alapján egy olyan szerkesztést is megadhatunk, amelyben nem szükséges egy hasonló háromszög közbeiktatása.

Jelöljük a háromszög alapját és magasságát a -val, ill. m -mel, az a -val szemközti szögét α -val. Legyen az alapot és a szárak meghosszabbítását érintő körnek középpontja K (az AA_1 magasság, egyben szögfelező meghosszabbításán), az AB egyenesen levő érintési pontja H és sugara az adott ρ . Messe a KH egyenes a BC egyenest az L pontban és legyen $A_1L = x$. Ezt az x hosszúságot fogjuk kiszámítani, majd megszerkeszteni.



Merőleges szárú hegyes szögekként $BAA_1 \sphericalangle = KLA_1 \sphericalangle = \alpha/2$ és $CAA_1 \sphericalangle = MBA_1 \sphericalangle = \alpha/2$, ezért a KLA_1 és BAA_1 , valamint CAA_1 és MBA_1 derékszögű háromszögek hasonlóak. A második és az első, ill. a negyedik és az első háromszögből a befogókra:

$$\frac{a}{2} : m = \rho : x, \quad \text{ill.} \quad \frac{m}{2} : \frac{a}{2} = \rho : x.$$

E két aránypárból (egyenletből) m -et kiküszöbölve a is kiesik (ez úgy is végrehajtható, hogy a két aránypárt tagról tagra összeszorozzuk és egyszerűsítünk), így x és ρ között kapunk összefüggést:

$$x^2 = 2\rho^2,$$

és innen $x = \rho\sqrt{2}$.

Ennek alapján szerkesztésünk a következő: a ρ sugarú körhöz tetszés szerinti A_1 pontjában érintőt szerkesztünk, erre A_1 -től mindkét irányban felmérjük $\rho\sqrt{2}$ -t vagyis a ρ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját. A végpontokat a kör K középpontjával összekötő egyenesek kimetszik a körből a szárak meghosszabbításainak érintési pontjait.

Megjegyzések. 1. A -t a KA_1 félegyenesből $KA = KL$ alapján is kimetszhetjük (a KLA_1 és KAH derékszögű háromszögek egybevágók).

2. Több versenyző lényegében a legutóbbi gondolatmenettel $\alpha/2$ -t határozta meg: helyesen erre jutott: $\tan^2 \alpha/2 = 1/2$, ebből négyzetgyökvonással és trigonometriai táblázattal meghatározta a szöget, és azt szögmérővel felmérte. – Ez az eljárás azonban nem tekinthető (euklidészi) szerkesztésnek.

3. A keresetthez hasonló egyenlő szárú háromszög akkor is megszerkeszthető, ha – a feladattól eltérően – az M magasságpontnak felezés helyett valamely más, előírt arányban kell osztania az AA_1 szakaszt. Megoldásaink megfelelő módosítással az $A_1M : MA = 1 : k$ előírás esetén is használhatók, kivéve az I. megoldást, amelyben lényegesen kihasználtuk, hogy $k = 1$ (a hozzáfűzött megjegyzések azonban használhatók). A feladatnak k minden (pozitív) értéke mellett egy és csakis egy megoldása van, és ez áll akkor is minden $k < 1$ -re, ha M -et AA_1 meghosszabbításán kell kapnunk.