

Kezdők (I. osztályosok) versenye.

1. feladat: Bontsuk fel $5/8$ -ot minden lehetséges módon három olyan pozitív tört összegére, amelyeknek a számlálója 1.

Megoldás: Olyan a, b, c természetes számokból álló hármast kell keresnünk, amelyre

$$(1) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Feltehetjük, hogy a a legkisebb, c a legnagyobb nevező a hármásban (egyenlőség persze nincs kizárva), vagyis

$$(2) \quad (0 <) a \leq b \leq c.$$

Eszerint reciprokok értékeik közül $1/a$ a legnagyobb és $1/c$ a legkisebb:

$$(3) \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} (> 0).$$

Tájékozódjunk a nagyságáról. Evégett (1) jobb oldalán a második és harmadik tagot (3) alapján előbb a nem kisebb $1/a$ -val, majd a biztosan kisebb 0 -val helyettesítjük; így olyan két egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk, melyeknek $1/a$ a nagyobb, ill. a kisebb oldalán áll:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}, & \text{innen} & \quad a \leq \frac{24}{5} < 5, \\ \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &> \frac{1}{a}, & \text{innen} & \quad a > \frac{8}{5} > 1. \end{aligned}$$

Ezek szerint a -ra három lehetőség van: $a = 2$, $a = 3$, vagy $a = 4$.

1. Keressünk először $a = 4$ -hez megfelelő b -t és c -t. (1)-ből

$$(4) \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

A fenti megfontolás első felét b -re ismételve (3) alapján

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}, \quad \text{tehát} \quad b \leq \frac{16}{3} (< 6).$$

Másrészt most (2) szerint b is legalább 4, tehát $b = 4$, vagy $b = 5$. Ezekkel (4)-ből $c = 8$, ill. $c = 40/7$ adódik, de az utóbbi nem egész szám. – Eszerint $a = 4$ mellett egy felbontást kapunk:

$$(1) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

2. Legyen most $a = 3$. Ekkor (1) így alakul

$$(5) \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7}{24},$$

innen a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}, \quad \text{tehát} \quad b \leq \frac{48}{7} < 7,$$

eszerint most a $b = 3, 4, 5$ és 6 lehetőségek jönnek szóba. A megfelelő c -értékek (5)-ből: $c = -24$, $c = 24$, $c = 120/11$, ill. $c = 8$. Csak a második és a negyedik érték természetes szám, így két felbontást kapunk:

$$(II, III) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}.$$

3. Végül az $a = 2$ esetben (1)-ből

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Itt alkalmas átalakítással közvetlenül áttekinthetjük az összes b, c értékpárokat. Távolítsuk el a törtet, gyűjtsünk minden tagot az egyenlet jobb oldalára, és igyekezzünk a kifejezést szorzattá alakítani:

$$8b + 8c = bc, \quad 0 = bc - 8b - 8c = (b - 8)(c - 8) - 64.$$

Eszerint 64-et kell minden lehető módon két egész tényezőre bontani. A tényezőkre (2) folytán $b - 8 \leq c - 8$, másrészt nem lehet a két tényező negatív, mert akkor a kisebbre $b - 8 \leq -8$, $b \leq 0$ adódnék. Így a lehetséges felbontások:

$$\begin{aligned} b - 8 &= 1, 2, 4, 8, \\ c - 8 &= 64, 32, 16, 8, \end{aligned}$$

és ezekből a következő felbontások adódnak:

$$(IV-VII) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}.$$

Mindezek szerint $5/8$ -ra az előírt alakban a fenti hét (I)–(VII) felbontás lehetséges.

Megjegyzés. Az $a = 3$ esetben adódott

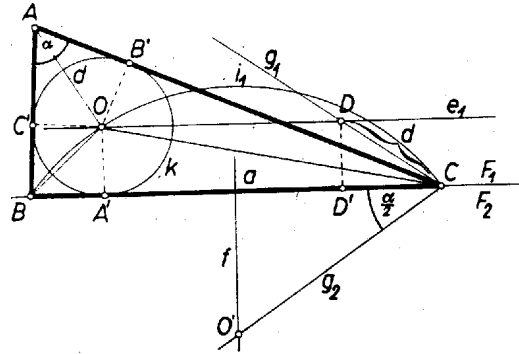
$$\frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24}$$

felbontás mutatja, hogy ha elejtjük a pozitívság követelményét, akkor a feladatnak több megoldása van. A fentihez hasonló gondolatmenettel további 6 ilyen felbontást találunk:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{56} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}; \\ \frac{5}{8} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük egy oldalát (a), az ezzel szemkötti szöget (α), és annak a szakasznak a hosszát, amely az α szög csúcsát a háromszög beírt körének középpontjával összeköti.

I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, legyen a keresett háromszög ABC , ebben $BC = a$, $BAC \sphericalangle = \alpha$ és O -val a beírt k kör középpontját jelölve $AO = d$ az adott szakasz.



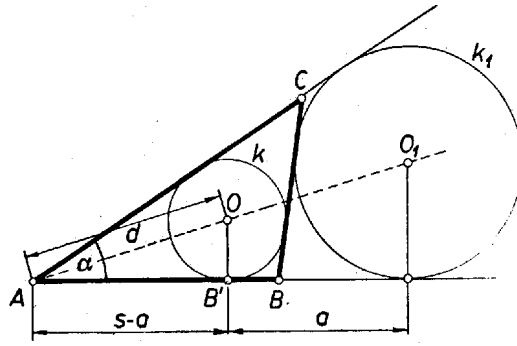
Legyenek továbbá k -nak az oldalakon levő érintési pontjai A' , B' , C' és sugara ϱ . Az OBC háromszögben

$$COB \sphericalangle = 180^\circ - OBC \sphericalangle - OCB \sphericalangle = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Eszerint O csak azon az i_1 , i_2 körívpáron lehet, amelynek (B és C -től különböző) pontjaiból az adott BC szakasz a megszerkeszthető $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szögben látható. Másrészt megszerkeszthetjük $OB' = \varrho$ -t, mert az AOB' derékszögű háromszög alakját a d átfogó és az $\alpha/2$ hegyesszög meghatározza, – és evvel még egy mértani helyet kapunk O -ra, ugyanis O csak a BC -től ϱ távolságban fekvő e_1 , e_2 párhuzamos egyeneseken lehet.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. Felvesszük a $BC = a$ szakaszt és kijelöljük, hogy a háromszöget a BC egyenessel létrejött F_1 és F_2 félsíkok közül F_1 -en kívánjuk kapni. F_1 -en fekszik O is, elég lesz tehát az i_1 -et és e_1 -et megszerkesztenünk. CB -re a C csúcsban mindkét félsíkon felmásoljuk az $\alpha/2$ szöget, a szárak g_1 , g_2 , megszerkesztjük BC -nek f felező merőlegesét, majd g_2 és f -nek O' metszéspontja körül $O'B = O'C$ sugárral megrajzoljuk i_1 -et. e_1 -et pedig úgy kapjuk, hogy g_1 -re C -ből felmérjük d -t, és ennek D végpontján át BC -vel párhuzamost húzunk. i_1 és e_1 közös pontja O , ennek vetülete BC -re A' és $OA' = \varrho$, ezek alapján megrajzoljuk a k kört. Most már az A csúcsot a B és C -ből k -hoz húzott második érintők metszéspontja adja. (Ezek céljára C' , B' -t a B körül BA' , ill. C körül CA' sugárral írt körrel metszhetjük ki.)

Szerkesztésünk helyes, mert a BCO' egyenlő szárú háromszög O' -nél levő szöge kétszerese $\alpha/2$ pótyszögének, azaz $180^\circ - \alpha$, ez egyben a O' középpont körül $O'B$ sugárral írt kör F_1 -beli i_1 ívéhez tartozó középponti szög. Így a kör F_2 -beli ívéhez $180^\circ + \alpha$ nagyságú középponti szög tartozik, tehát a BOC kerületi szög ennek fele: $90^\circ + \alpha/2$. Most már a $C'BC$ és $B'CB$ szögek összege kétszerese az OBC és OCB szögek összegének, a BOC szög kiegészítő szögének, $90^\circ - \alpha/2$ -nek, azaz $180^\circ - \alpha$ -val egyenlő, tehát a szerkesztett érintők A -nál valóban α szöget zárnak be (az a szögük ekkora, amelynek terében a BC szakasz van). AO felezi az A -ból k -hoz húzott érintők szögét, ezért $OAB' \sphericalangle = \alpha/2 = DCB \sphericalangle$,



Most már k és k_1 közös belső érintőinek az α szög szárai közé eső szakasza az a oldal.

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(1) \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \quad \text{és}$$

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

akkor

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Megoldás: A (2) feltételi egyenlőség négyzete alkalmas rendezéssel így írható:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xyz}{abc} \left(\frac{c}{z} + \frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right).$$

A második zárójelbeli kifejezésben ráismerünk (1) bal oldalára, amely 0-val egyenlő. Ennek figyelembevételével kapott egyenlőségünk azonos (3)-mal, a bizonyítandó állítással.

Az (1) és (2) feltevéseknek csak úgy van értelmük, ha az a, b, c, x, y, z számok 0-tól különbözők, így pedig az alkalmazott átalakítások megengedett azonos átalakítások voltak.

Megjegyzés. A látottaknál valamivel több ismeret felhasználásával az állítás így is bizonyítható. $x/a, y/b, z/c$ -t u, v, w -vel jelölve ezek 0-tól különböző valós számok, feltételeink szerint

$$(4) \quad u + v + w = 1, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \text{amiből} \quad vw + wu + uv = 0,$$

és $u^2 + v^2 + w^2$ -et kell meghatároznunk. (4) első és harmadik kifejezése együttthatóként szerepel a $T = (t-u)(t-v)(t-w)$ kifejezésnek t hatványai szerint rendezett polinomalakjában, eszerint uvw -t d -vel jelölve

$$(5) \quad T = t^3 - (u + v + w)t^2 + (uv + vw + wu)t - uvw = t^3 - t^2 - d.$$

Hozzuk most két módon polinomalakra a $T^* = (t^2 - u^2)(t^2 - v^2)(t^2 - w^2)$ szorzatot. Egyrészt

$$T^* = (t - u)(t - v)(t - w)[-(-t - u)(-t - v)(-t - w)] = TT',$$

ahol T' annak a kifejezésnek (-1) -szerese, amely T -ből t -nek $-t$ -vel való helyettesítésével áll elő; ennél fogva $T' = -[(-t)^3 - (-t)^2 - d] = t^3 + t^2 + d$, és így $T^* = (t^3 - t^2 - d)(t^3 + t^2 + d) = t^6 - t^4 - 2dt^2 - d^2$.

Másrészt az (5)-höz hasonló kifejtéssel

$$T^* = t^6 - (u^2 + v^2 + w^2)t^4 + (u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)t^2 - u^2v^2w^2.$$

A két polinomalakból az egyező fokú tagok együttthatóinak összehasonlításából kapjuk a bizonyítandó

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

egyenlőséget, továbbá leolvashatjuk az

$$(6) \quad \left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{z^2x^2}{c^2a^2} \right) u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = -2d = -uvw \left(= -2\frac{xyz}{abc} \right)$$

összefüggést is. Ebből az is látszik, hogy u , v , w közül kettő pozitív és egy negatív kell hogy legyen. Ez valóban leolvasható a (4) feltételi egyenletekből is: a második szerint nem lehet mindhárom egyező előjelű; ha pedig kettő, pl. v és w negatív, akkor az első egyenlet szerint mindkettő abszolút értéke kisebb, mint u -é, tehát $\frac{1}{u}$ kisebb $\left|\frac{1}{v}\right|$ és $\left|\frac{1}{w}\right|$ -nél,

így $\frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ negatív, és ez méginkább áll $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ -re.

A (6) azonosság közvetlenül is nyerhető a feltételi egyenletekből:

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = (uv + vw + wu)^2 - 2uvw(u + v + w) = -2uvw.$$