

1. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

I. megoldás: Fejezzük ki minden szögfüggvényt x szögfüggvényeivel:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x &= \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x(1 + 2 \cos x), \\ \sin 3x &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x(2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos^2 x = \\ &= \sin x(4 \cos^2 x - 1) = \sin x(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1), \\ 1 + \cos x + \cos 2x &= 1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \cos x(1 + 2 \cos x).\end{aligned}$$

Mind a három kifejezésben szerepel az $1 + 2 \cos x$ tényező. A két oldal különbségét képezve és ezt a tényezőt kiemelve

$$\begin{aligned}(1 + 2 \cos x) [\sin x + \sin x(2 \cos x - 1) - \cos x] &= \\ = (1 + 2 \cos x)(2 \sin x \cos x - \cos x) &= (1 + 2 \cos x)(2 \sin x - 1) \cos x.\end{aligned}$$

Ez a kifejezés úgy lehet 0, ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, vagy $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = 0$, tehát a következő szögekre:

$$\begin{aligned}x &= 120^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 240^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \\ x &= 30^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 150^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & k &= 0, 1, 2, \dots \\ x &= 90^\circ \pm k \cdot 360^\circ, & x &= 270^\circ \pm k \cdot 360^\circ.\end{aligned}$$

Megjegyzés: Igyekeztünk a fentiekben a legismertebb átalakításokkal érni célhoz, azonban sok más módon is átalakíthatjuk az egyenletet. Ha felhasználjuk pl. a bal oldalon a

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

összefüggést,¹ akkor a

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

átalakítás után gyorsabban adódik az $1 + 2 \cos x$ tényező kiemelhető volta és az egyenlet további átalakítása.

II. megoldás: Vizsgáljuk általánosabban tetszőleges n természetes számra a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x$ egyenletet. Ismeretes, hogy a bal oldal is, a jobb oldal is zárt alakra hozható, pl. úgy, hogy megszorozzuk $2 \sin \frac{x}{2}$ -vel. Felhasználva a könnyen igazolható

$$(1) \quad 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

és

$$(2) \quad 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha)$$

azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx) &= 2 \sin \frac{x}{2} \sin x + \\ + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 3x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x + \\ + \cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{5}{2}x - \cos \frac{7}{2}x + \dots + \cos \frac{2n-1}{2}x - \\ - \cos \frac{2n+1}{2}x &= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x;\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{x}{2} [1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x] &= 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos x + \\ + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos(n-1)x &= 2 \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2} + \\ + \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x + \dots + \sin \frac{2n-1}{2}x - \sin \frac{2n-3}{2}x &= \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{2n-1}{2}x.\end{aligned}$$

¹ Ez könnyen igazolható, ha a bal oldalon α -t és β -t a jobb oldalon szereplő szögek összege, illetőleg különbségeként írjuk.

A kapott kifejezések ugyancsak az (1), ill. (2) azonosságok segítségével – azokat ellenkező irányban alkalmazva – szorzattá alakíthatók, ha (1)-ben α -t és β -t úgy választjuk, hogy $\alpha - \beta = \frac{x}{2}$, $\alpha + \beta = \frac{2n+1}{2}x$ legyen, illetőleg (2)-ben úgy, hogy $\alpha + \beta = \frac{2n-1}{2}x$, $\alpha - \beta = \frac{x}{2}$ legyen.

Az első esetben $\alpha = \frac{n+1}{2}x$, $\beta = \frac{n}{2}x$ és így

$$\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x;$$

a második esetben $\alpha = \frac{n}{2}x$, $\beta = \frac{n-1}{2}x$, és így

$$\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{2n-1}{2}x = 2 \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n-1}{2}x.$$

Egyenletünket tehát, ha még 2-vel osztunk, a következő alakra hoztuk:

$$\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x = \sin \frac{n}{2}x \cos \frac{n-1}{2}x.$$

Mivel átalakítás közben szoroztunk $\sin \frac{x}{2}$ -vel, ennek a gyökeit, tehát az $x = k \cdot 360^\circ$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) szögeket külön meg kell vizsgálnunk. Ezekre az eredeti egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon viszont n darab 1-es összege, ezek tehát az eredeti egyenletnek nem gyökei, ezeket a továbbiakban kizárjuk.

Redukáljuk a nyert egyenletet 0-ra, és igyekezzünk szorzattá alakítani a két oldal különbségét:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n+1}{2}x - \cos \frac{n-1}{2}x \right) = \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n}{2}x \cos \frac{x}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{n}{2}x \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{n}{2}x \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{n}{2}x \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{n}{2}x \left\{ \sin \frac{n}{2}x \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \cos \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \right\} = \\ &= \sin \frac{n}{2}x \left(\sin \frac{n}{2}x - \cos \frac{n}{2}x \right) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Itt az első tényező 0-helyei azok a szögek, amelyekre

$$\frac{n}{2}x = k \cdot 180^\circ, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{k \cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

a második, illetőleg harmadik tényező akkor tűnik el, ha

$$\frac{n}{2}x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad \text{ill.} \quad \frac{x}{2} = 45^\circ + k \cdot 180^\circ,$$

tehát az

$$x = \frac{90^\circ}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n}, \quad \text{ill.} \quad x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

szögekre. A lényegesen különböző szögeket különválasztva és az első csoportból a fentebb kizárt $k \cdot 360^\circ$ alakú szögeket elhagyva azt kapjuk, hogy az egyenlet

$$\left. \begin{aligned} x &= r \frac{360^\circ}{n} + k \cdot 360^\circ, & r &= 1, 2, \dots, n-1 \\ x &= \frac{90^\circ}{n} + s \frac{360^\circ}{n} + k \cdot 360^\circ, & s &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A kitűzött feladatot jelentő $n = 3$ esetben a 120° és 240° (és az ezektől nem lényegesen különböző szögek) a gyökök első csoportjából adódnak, 30° és 150° a második csoportból $s = 0, 1$ esetén, 90° az utolsó gyök, míg 270° ismét a gyökök második csoportjából adódik $s = 2$ esetén.

Megjegyzések: A II. megoldásban tárgyalt általánosítást egy versenyző, Németh József felvetette és megoldotta.

A 90° felléphet a gyökök első csoportjában is (akkor, ha n osztható 4-gyel és $r = \frac{n}{4}$), továbbá a gyökök második csoportjában (ha $n \cdot 4l + 1$ alakú és $s = l = \frac{n-1}{4}$). Ezekben az esetekben 90° az egyenletnek kétszeres gyöke.

2. feladat. Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy

$$x^2 + ax + b$$

csak akkor állíthat elő végtelen sok egész x -értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

I. megoldás: Azt kell vizsgálnunk, mikor állhat fenn egész x , y értékekre

$$x^2 + ax + b = y^2.$$

Innen x -et meghatározva

$$(1) \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4y^2}}{2},$$

és ez csak úgy adhat egész értéket, ha a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet áll:

$$a^2 - 4b + 4y^2 = z^2$$

Innen

$$z^2 - 4y^2 = (z + 2y)(z - 2y) = a^2 - 4b.$$

A jobb oldalon állandó érték áll; így ha y is, z is természetes szám, akkor ez az egyenlőség csak olyan értékekre állhat fenn, amelyekre $2y + z$ nem nagyobb ennél az állandó értéknél. Ilyen y , z számpár csak véges sok van. Minden y értékhez (1) szerint legfeljebb két x érték tartozik, tehát csak véges sok olyan egész x érték lehet, amelyre $x^2 + ax + b$ négyzetszám, ha $a^2 - 4b \neq 0$.

Ha viszont $a^2 - 4b = 0$, akkor

$$x^2 + ax + b = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

tehát a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: A tárgyalt második esetben $b = \frac{a^2}{4}$ csak úgy lehet egész szám, ha a páros. Ebben az esetben az adott másodfokú kifejezés egy egész együtthatós elsőfokú polinom négyzete, s így minden egész x értékre négyzetszámot állít elő.

II. megoldás: Kényelmesebb lesz az adott kifejezés négyszerezését vizsgálni. Ez is négyzetszámot állít elő, ha az adott polinom értéke négyzetszám, de fordítva is: a polinom egész helyen mindig egész számot állít elő, s így a négyszerezése mindig páros számot. Ha ez a néggyel szorzott érték négyzetszám, akkor páros szám négyzetének kell lennie, s így a negyedrésze, vagyis az eredeti polinom értéke is egész szám négyzete. Elegendő tehát a polinom négyszerezését vizsgálni:

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x + a)^2 + 4b - a^2.$$

Ha ez egy y egész szám négyzete, akkor

$$4b - a^2 = y^2 - (2x + a)^2 = (y + 2x + a)(y - 2x - a).$$

Azonban egy egész szám a 0 kivételével csak véges sok féleképpen bontható két egész szám szorzatára, egy-egy felbontás pedig már egyértelműen meghatározza x -et és y -t.

Így az adott kifejezés csak akkor vehet fel végtelen sok egész x értékre négyzetszámot, ha $4b - a^2 = 0$, ekkor

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x + a)^2$$

és ennek negyedrésze ugyancsak egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Mint láttuk, ha végtelen sok helyen állít elő a polinom négyzetszámot, akkor minden egész x -re négyzetszám az értéke, tehát eredményünk így fogalmazható: ha egy a feladatban adott alakú polinom értéke minden egész x -re négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. Ez az állítás már sokkal általánosabban igaz, nemcsak a legmagasabb fokú tagnak adhatunk együtthatót, hanem a foksámra sem kell kikötést tennünk. Érvényes a következő tétel: Ha egy egész együtthatós polinom értéke minden egész helyen négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. A tétel négyzet helyett tetszés szerinti egész k -val k -adik hatványokra is igaz.

Az viszont lényeges, hogy ne csak végtelen sok egész helyre tegyünk feltételt, mert amint a legmagasabb együtthatóról nem kötjük ki, hogy 1 legyen, akkor már van olyan másodfokú polinom is, amelyik nem teljes négyzet, és végtelen sok egész helyen vesz fel négyzetszámot értékül.

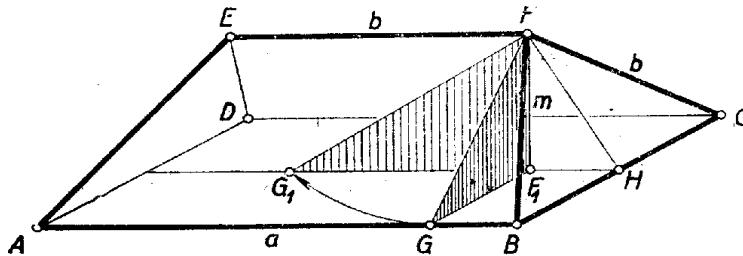
3. feladat. Alkossunk 6 csúcsú, 5 lapú poliédert a következő feltételekkel:

a) a poliéder egyik lapja a oldalú négyzet;

b) a poliéder összes többi éle egyenlő egymással;

c) a négyzet két szomszédos oldalához csatlakozó két lapnak a négyzetlappal bezárt szöge egymást 90° -ra egészíti ki. Bizonyítsuk be, hogy a poliéder két lapjának az átlói a hosszúságúak.

Megoldás: A leírt test négyzetlapja legyen $ABCD$. A testnek van egy ennek valamelyik oldalával, mondjuk AB -vel párhuzamos EF éle, melynek merőleges vetülete a négyzet AB -vel párhuzamos középvonalára esik és azon szimmetrikusan helyezkedik el.



Legyen F merőleges vetülete a négyzetlapon, a négyzet AB , ill. BC oldalán rendre F_1 , G és H , jelöljük a négyzet oldalaitól különböző egyenlő élek hosszát b -vel, az FF_1 távolságot m -mel. Az FF_1 szakasz merőleges F_1G -re és F_1H -ra is, így az FF_1G háromszöget beforgathatjuk körülötte az EFH síkba, ekkor G egy a HF_1 egyenesen fekvő G_1 pontba kerül. A c) feltétel szerint az FG_1H háromszög F -nél derékszögű, FF_1 pedig a háromszög magassága. Így a magasságra vonatkozó középarányossági tétel szerint, mivel $F_1G = a/2$ és $F_1H = (a-b)/2$,

$$(1) \quad m^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a-b}{2}.$$

Számítsuk ki az $ABFE$ trapéz AF átlóját, mint a páronként merőleges AG , GF_1 , F_1F szakaszokból alkotható téglatest testátlóját. Az EB átló és a $GDEF$ trapéz átlói szimmetria okokból ugyanekkorák. Felhasználva (1)-et is, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AF^2 &= AG^2 + GF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} = \frac{1}{4}(3a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

A feladat állításához azt kell tehát belátnunk, hogy $ab + b^2 = a^2$. Az a és b élhosszak közt tudunk egy összefüggést kapni, ha felírjuk Pythagoras tételét FB -re, mint annak a téglatestnek átlójára, melynek egyik lapja BGF_1H és egyik további csúcsa F . Felhasználva (1)-et is:

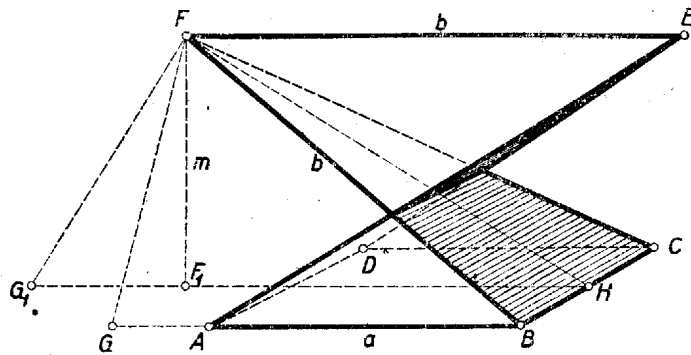
$$\begin{aligned} b^2 &= FB^2 = BH^2 + HF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(3a^2 - 3ab + b^2). \end{aligned}$$

A b -t tartalmazó tagokat a bal oldalra rendezve és 3-mal osztva innen valóban

$$ab + b^2 = a^2$$

adódik és ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzések: 1. Az utolsó egyenletből b -re két érték adódik: $a(\sqrt{5}-1)/2$ és $-a(\sqrt{5}+1)/2$. Mint egy versenyző, Kalmár Ágota, megjegyezte, a negatív gyököknek is lehet geometriai jelentést tulajdonítani. Ennek egy önmagát átmetsző test felel meg: a két háromszöglap áthatol egymáson, a másik két oldallap pedig hurkolt trapéz lesz $a(\sqrt{5}+1)/2$ oldalhosszúsággal.



Ugyanekkora az alaplappal párhuzamos él is, míg a trapézok átlói (amelyek most a hurkolt trapézon kívül húzódnak) a hosszúságúak.

2. Helyezzük a feladatban szereplő testet egy kocka felső vízszintes $ABCD$ lapjára (EF legyen AB -vel párhuzamos), majd az $ABRS$ -re is helyezzük el a test egy példányát úgy, hogy az EF -nek megfelelő él AS -sel legyen párhuzamos. Ekkor az AB -hez csatlakozó háromszög és trapéz lap a lapszögekre tett kikötés szerint egy síkba esik és egy egyenlő oldalú ötszöget alkot, amely az EF felezőmerőlegesére szimmetrikus. A többi kockalapokra is elhelyezhetjük a test egy-egy példányát úgy, hogy egy 12 egybevágó, egyenlő oldalú ötszög határolta poliédert kapjunk. Belátható (erre még visszatérünk), hogy a kapott test egy szabályos dodekaéder.

