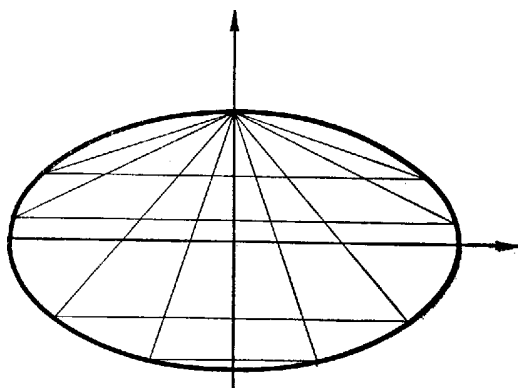
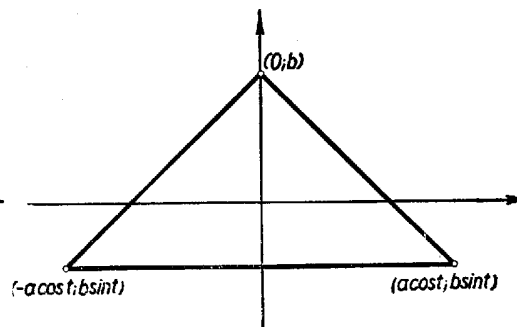


Szélsőértékfeladatok általában a differenciálszámítás segítségével oldhatók meg. Ez azonban jelenleg nem anyaga a középiskolának. Néhány példát szeretnénk mutatni arra, hogy sokszor reménytelennek látszó szélsőértékfeladatok mégis megoldhatók a differenciálszámítás nélkül is, tehát elemi úton.

1. Adva van egy a, b féltengelyű ellipszis. Írjunk bele olyan háromszögeket, melyeknek egyik csúcsa a kistengely végpontja, a szembenfekvő oldal pedig a nagytengellyel párhuzamos. Melyik közülük a legnagyobb területű? (1. ábra)



1. ábra



2. ábra

Tudjuk (lásd a III. gimn. tankönyv 1953. 247. old.), hogy az ellipszis megadható a következő paraméteres egyenletrendszerrel:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (-\pi \leq t < \pi).$$

Így a 2. ábra szerint a fölrajzolt háromszög kerülete:

$$(1) \quad T = a \cos t (b - b \sin t) = ab \cos t (1 - \sin t).$$

A T függvénye t -nek. Az értelmezési tartomány

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nyilvánvalóan tekinthetjük a $\left(\frac{T}{ab}\right)^2$ függvényt, ennek ugyanazon a helyen van szélsőértéke mint T -nek, hiszen T a jelzett intervallumban nem negatív, tehát:

$$(2) \quad y = \left(\frac{T}{ab}\right)^2 = \cos^2 t (1 - \sin t)^2 = (1 - \sin^2 t)(1 - \sin t)^2$$

Ennek a komplikált trigonometriai függvénynek kell már most a szélsőértékét (jelen esetben a maximumát) meghatározni. Bontsuk fel tényezőkre:

$$(3) \quad y = (1 - \sin t)(1 + \sin t)(1 - \sin t)(1 - \sin t),$$

szorozzuk meg a függvényt egyelőre határozatlan m és n pozitív konstansokkal, ekkor nyerjük a

$$(4) \quad z = mny = m(1 - \sin t)n(1 + \sin t)(1 - \sin t)(1 - \sin t).$$

A z függvény maximumának meghatározása már sikerülni fog. (Nyilván az y maximuma ugyanott van.) A négy tényező összege ugyanis

$$(5) \quad (n - m - 2) \sin t + m + n + 2.$$

Ez az összeg t -től független, ha

$$(6) \quad n = m + 2.$$

Viszont a számtani és a mértani közép relációjából tudjuk, hogy amennyiben egy összeg, mely pozitív mennyiségekből áll, állandó, a tagok szorzata akkor a legnagyobb, ha mind egyenlők, tehát jelenleg, ha

$$(7) \quad m(1 - \sin t) = 1 - \sin t, \quad n(1 + \sin t) = 1 - \sin t.$$

(7)-ből és (6)-ból

$$m = 1, \quad n = \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} = 3$$

következik. Ez utóbbiból

$$4 \sin t = -2, \quad \sin t = -\frac{1}{2}, \quad \text{és így } t = -30^\circ.$$

A keresett maximális területű háromszög csúcspontjai tehát

$$(0; b), \quad \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right).$$

Számítsuk ki a maximum nagyságát is:

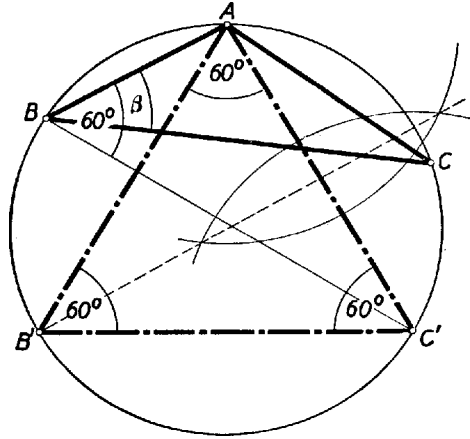
$$T_{max} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3b}{2} = ab \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Az ellipszis területe $ab\pi$ lévén, a két terület aránya

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sim 0,413.$$

Megjegyezzük, hogy ebben a feladatban egyszerűbben is célhoz juthatunk a kör és ellipszis közötti affinitás felhasználásával.

Először is könnyű belátni, hogy egy adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög a legnagyobb területű. Tekintsünk ugyanis egy körbe írt ABC háromszöget, amelynek nincs 60° -os szöge (3. ábra).



3. ábra

Ennek legalább egyik szöge pl. a β szöge kisebb 60° -nál. Ha a β szöget alkotó kisebb oldalt (ábránkban az AB -t) rögzítjük, és a C csúcspontot a körön eltoljuk, amíg BC' az AB oldallal 60° -os szöget zár be, akkor az így nyert ABC'_Δ területe nagyobb, mint az ABC_Δ területe, mert a közös AB oldalhoz tartozó magasság az előbbiben nagyobb mint

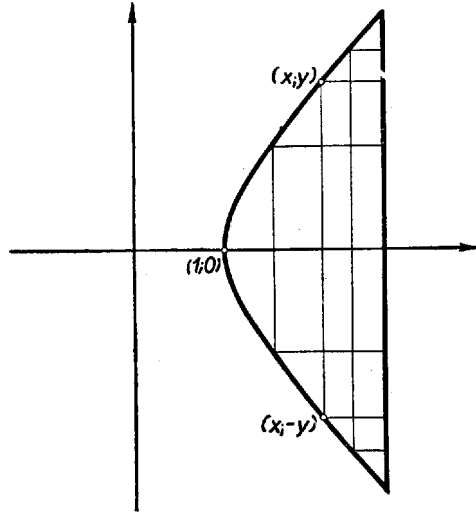
az utóbbiban, lévén $BA < BC$, és az $\widehat{AC} < \widehat{AC'} = 120^\circ$. Ha az ABC'_Δ -ben az AC' oldalt rögzítjük, és a B pontot a körön eltoljuk B' -be úgy, hogy B' az AC' oldalt merőlegesen felező egyenesbe essék, akkor a $B'A = B'C'$, és így az $AC'B$ egyenlőszárú háromszögben az AC' alapján felvett szögek egyenlők, és mivel a B' -nél fekvő szög, mint kerületi szög, 60° -os, azért az A és C' csúcsokban fekvő szögek is 60° -osak, vagyis az $AB'C'_\Delta$ szabályos, és azonfelül az $AB'C'_\Delta$ területe nagyobb mint az ABC'_Δ területe, mert a közös AC' oldalhoz tartozó magasság nagyobb az előbbiben mint az utóbbiban.

Tehát bármelyik, körbe írt, háromszögről, amelynek nem minden szöge 60° -os, legfeljebb két lépésben kimutatható, hogy területe *kisebb* a körbe írt *szabályos* háromszög területénél.

Ismeretes, hogy valamely síkidom területe és az affin idom területének aránya állandó (jelen esetben ez közvetlenül leolvasható). Tehát, ha valamelyik síkidom területe a körrendszerben maximális, akkor a megfelelő idom területe az ellipszis rendszerben is maximális. Ha az ellipszis főkörébe írunk szabályos háromszöget, melynek egyik csúcsa a $(0; a)$ pont, akkor a szembenfekvő oldal felezi a $(0; 0)$, $(0; -a)$ végpontú főkör sugarát, és így az affinháromszög egyik csúcspontja a $(0; b)$, és e ponttal szemközti oldal felezi a $(0; 0)$, $(0; -b)$ végpontú ellipszis féltengelyt. Tehát a maximális területű háromszög másik két csúcspontja:

$$\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right).$$

2. Tekintsük az $x^2 - y^2 = 1$ egyenlő oldalú hiperbola $x > 0$ ágát, melynek az $x = a > 1$ egyenessel levágott szegmentumába téglalapokat írunk, melynek középvonala az x tengelyre esik (4. ábra).



4. ábra

E téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb?

Nyilván

$$(8) \quad T = 2y(a - x) = 2\sqrt{x^2 - 1}(a - x).$$

Tekintve az $y = \left(\frac{T}{2}\right)^2$ függvényt

$$y = (x - 1)(x + 1)(a - x)(a - x).$$

A négy tényező szorzat maximumának kiszámítását kíséreljük meg az előbbi módszerrel. Az első tényezőt m -mel, a másodikat n -nel szorozva, a tényezők összegéből akkor esik ki x , ha

$$(9) \quad m + n - 2 = 0,$$

és akkor lesz még egyenlő is a négy tényező, ha

$$(10) \quad m \cdot (x - 1) = a - x, \quad n \cdot (x + 1) = a - x.$$

(10)-ből m -et és n -et (9)-be helyettesítve

$$\frac{a - x}{x + 1} + \frac{a - x}{x - 1} - 2 = 0,$$

azaz

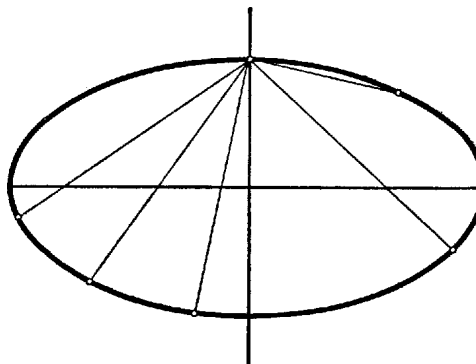
$$2x^2 - ax - 1 = 0,$$

ahonnan

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8}}{4}.$$

Ezen a helyen van maximum. Ezen értéket (8)-ba helyettesítve, megkapjuk T maximális értékét.

3. Igen érdekes feladat a következő. Az ellipszis mely pontja van a kis tengely végpontjától a legnagyobb távolságra? (5. ábra)



5. ábra

Ismét az első feladatbeli paraméteres egyenletrendszert használva, és mindjárt a d távolság négyzetét tekintve

$$\begin{aligned} f(t) &= d^2 = a^2 \cos^2 t + (b \sin t - b)^2 = a^2(1 - \sin^2 t) + b^2(\sin t - 1)^2 = \\ &= (b^2 - a^2) \sin^2 t - 2b^2 \sin t + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Mint ismeretes $a^2 - b^2 = c^2$, ahol c a lineáris excentricitás.

Tehát

$$f(t) = -c^2 \sin^2 t - 2b^2 \sin t + a^2 + b^2 = 0.$$

Ez $\sin t$ -ben másodfokú függvény, amelynek az ismeretes képlet szerint

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2}$$

helyen van maximuma.

Itt 3 esetet kell megkülönböztetni.

1. eset: $b > c$, akkor

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2} < -1,$$

és így ilyen t érték nincs. Maga a függvény az értelmezési tartományban folyton csökken, s így legnagyobb az értéke az intervallum elején $-\frac{\pi}{2}$ -nél, ahol

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = d^2 = -c^2 + 2b^2 + a^2 + b^2 = 4b^2,$$

tehát

$$d_{max} = 2b,$$

azaz a kistengely másik végpontja van a legtávolabb.

2. eset: $b = c$, ekkor

$$\sin t = -1 \quad \text{vagyis} \quad t = -\frac{\pi}{2}.$$

Ez tehát ugyanarra az eredményre vezet, mint az 1. eset.

3. eset: $b < c$. Most létezik olyan t , melyre

$$\sin t = -\frac{b^2}{c^2},$$

és erre lesz függvényünknek maximuma. Számítsuk ki mekkora ez:

$$\begin{aligned} f_{max} &= d_{max}^2 = -c^2 \frac{b^4}{c^4} + \frac{2b^4}{c^2} + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + \frac{b^4}{c^2} = \\ &= \frac{a^2 c^2 + b^2(c^2 + b^2)}{c^2} = \frac{a^2 c^2 + a^2 b^2}{c^2} = \frac{a^4}{c^2}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$d_{max} = \frac{a^2}{c}.$$

Tehát a mértani középárányos c és d_{max} között.

Ugyanez a feladat érdekes módon megoldható egészen más gondolatmenettel is. (Lásd a jelen számban kitűzött 820. feladatot.)