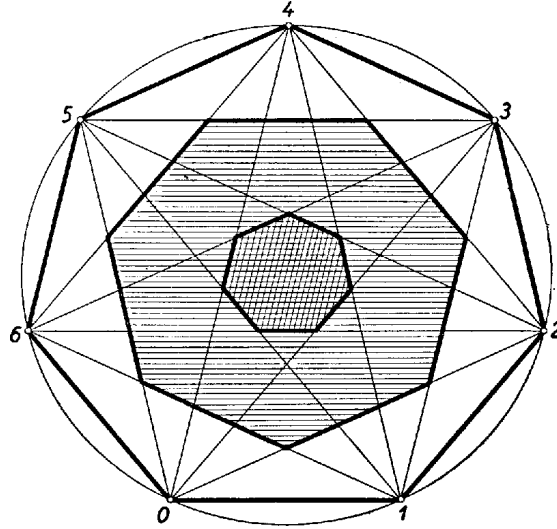


(2. befejező közlemény)

Most rátérek Rados elemi geometriai dolgozatainak ismertetésére.

Ha adva van n pont a síkban, kössük őket minden lehetséges módon össze, amint az ($n = 7$ esetére) az 1. ábrán látható, akkor az ismert – legkülső – sokszögön kívül az átlók is meghatároznak egy vagy több n -szöget. Ezeket alakjuk miatt *csillagsokszögeknek* nevezzük.



1. ábra

A csillagsokszög, amint neve is mutatja, geometriai fogalom, de pontosan definiálni csak egy fontos számelméleti fogalom segítségével lehet. Nevezzük az n pozitív egész számnál kisebb, és hozzá relatív prím pozitív egész számok számát $\varphi(n)$ -nek. Ha tehát pl. $n = 10$, akkor a nála kisebb és hozzá relatív prím pozitív egész számok 1, 3, 7, 9. Összesen 4 ilyen van, tehát $\varphi(10) = 4$. Azonnal belátható, hogy ha n valamely p törzsszámmal egyenlő, akkor

$$\varphi(p) = p - 1,$$

hiszen a törzsszám minden, nála kisebb egész számhoz relatív prím. Hát ha valamely p törzsszám hatványa? Nyomban látható, hogy p^k -val közös osztója csak a p -vel osztható számoknak van, ezek

$$p, 2p, 3p, \dots, p^{k-1}p,$$

ennélfogva

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

A $\varphi(n)$ függvény csak pozitív egész számokra van értelmezve; az ilyen függvényeket számelméleti függvényeknek nevezzük. A $\varphi(n)$ számelméleti függvény nevezetes sajátsága, amit itt csak bizonyítás nélkül közlünk, ha m és n relatív prím számok, akkor

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Ennek alapján könnyű bármely n számra $\varphi(n)$ meghatározása, ha n törzstényezőre való felbontását ismerjük. Ha

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző prímszámok, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(p_1^{k_1}) \varphi(p_2^{k_2}) \dots \varphi(p_r^{k_r}) = \\ &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots p_r^{k_r} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right), \end{aligned}$$

hiszen két különböző prím szám mindig relatív prím.

E kis számelméleti kitérés után visszatérünk a geometriai feladatra.

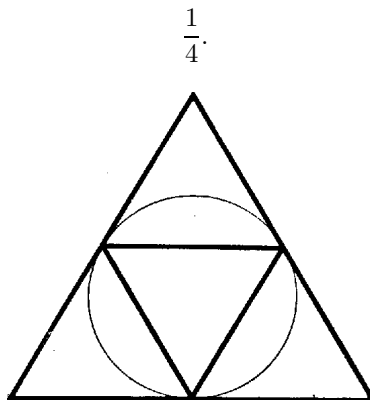
Ha a kör területét a

$$0, 1, 2, \dots, n - 1$$

számokkal jelzett n egyenlő részre osztják, szabályos n -szöget határoznak meg, ha azonban ezeket a pontokat minden lehetséges módon összekötjük, nemcsak egy, hanem $\frac{\varphi(n)}{2}$ számú szabályos sokszöget kapunk, amint ezt $n = 7$ esetében az 1. ábra mutatja. Az „átlók”-kal meghatározott, az ábrán kisraffozott sokszögeket hívjuk *csillagsokszögeknek*, ábránkon a három szabályos hétszög

$$(5) \quad 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6; \quad 0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 1 \ 3 \ 5; \quad 0 \ 3 \ 6 \ 2 \ 5 \ 1 \ 4.$$

A $0k$ húr ugyanis egy szabályos n -szög oldala, ha $(k, n) = 1$, de mivel a $0k$ és $0\overline{n-k}$ hűrok ugyanazt a sokszöget határozzák meg, azért számuk, amint már említettük, $\frac{\varphi(n)}{2}$. Az (5) sorozatban tehát az első az ismert közönséges, szabályos sokszög, a másik kettő pedig a csillagsokszög. Maga a csillagsokszög egy, az adottal koncentrikus kör körül írt érintősokszög, mert a $0k$ hűrok egy-egy kör érintői. Rados¹ a következő kérdésből indul ki: *Osszuk fel a kör területét 3 egyenlő részre, akkor, amint az a 2. ábráról közvetlenül leolvasható, a beírt és a körülírt háromszög területeinek aránya*



2. ábra

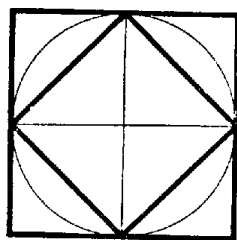
Ez racionális szám. Ha I_3 jelenti a beírt, C_3 a körülírt szabályos háromszög területét – és általában I_n a beírt és C_n a körülírt szabályos n -szög területét – akkor

$$\frac{I_3}{C_3} = \frac{1}{4}.$$

A beírt és körülírt négyzetek területeinek arányára is hasonló tétel érvényes, mert, amint ez a 3. ábrából közvetlenül világos

$$\frac{I_4}{C_4} = \frac{1}{2},$$

tehát szintén racionális.



3. ábra

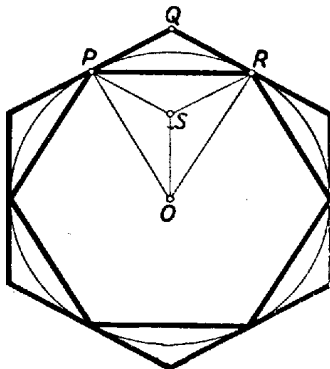
A szabályos hatszögre

$$\frac{I_6}{C_6} = \frac{3}{4}$$

szintén racionális, de ennek bizonyítása valamivel bonyolultabb (4. ábra).

¹RADOS G.: Adalék a szabályos sokszögek elméletéhez. *Math. és Term. Ért.* 22., 1904. 66–68 old. – Beitrag zur Theorie der regulären Vielecke. *Math. u. natw. Berichte aus Ungarn*, 22. 1904. 1–12. old. – Ugyanez franciául: Rados G.: Contribution a la théorie des polygones réguliers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 49., 1925. 1–4. old.

A tételt azonban már ezen közlései előtt ismerte. E sorok írója az 1900/01 tanévben hallgatta Rados számelméleti előadását, melyben a csillagsokszögekről szóló, a szövegben tárgyalt tételeket is előadta.



4. ábra

Legyen O a kör középpontja, PR a beírt hatszög valamely oldala és Q a körülírt hatszögnek P és R közé eső csúcsa, az OPR egyenlőoldalú háromszög középpontja S . Minthogy az OS , PS , RS egyenesek egyszersmind szögfelezők, azért az $OPQR$ négyszög a négy egybevágó PQR , PSO , RSO , PRS háromszögekre bomlik szét. Ennélfogva

$$\frac{1}{6}I_6 = 3PRS \quad \text{és} \quad \frac{1}{6}C_6 = 4PRS,$$

és ebből következik a fenti egyenlőség.

Ha azonban a kör kerületét 5, 7, 8, 9, 10, ... egyenlő részre osztjuk, ez az arány sohasem racionális. Radosnak mégis sikerült általánosítani a 3, 4, és 6-szög esetében fennálló tételt a következő módon:

Ha a körbe írt $\frac{\varphi(n)}{2}$ számú szabályos sokszög területeinek összege I_n , és a kör körül írt szabályos n oldalú sokszög területe C_n , akkor az $\frac{I_n}{C_n}$ hányados mindig racionális és értéke

$$\frac{I_n}{C_n} = \frac{\varphi(n) + \varepsilon_n}{4}$$

ahol ε_n egyenlő 0-val, ha n -nek van az 1-től különböző teljes négyzet osztója; ha nincs, akkor ε_n egyenlő +1 vagy -1, aszerint, amint n különböző prím számtényezőinek száma páros vagy páratlan.

Az eddigi 3, 4, 6-ra bizonyított tételek csakugyan ennek a tételnek speciális esetei, mert $\varphi(n)$ mindhárom esetben 2, így csak egy-egy szabályos sokszög van, továbbá $\varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_6 = +1$, és így $\frac{\varphi(n) + \varepsilon_n}{4}$, a kívánt $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ értékeket adja.

Rados tételének bizonyítása aránylag elemi, és főleg a figyelembe veendő területek meghatározásából áll, ami elemi trigonometriai úton lehetséges, de egy lényeges helyen igénybe vett felsőbb segédeszközöket, úgy, hogy ismertetésétől el kell tekintenem.

Rados még egy további dolgozatában² foglalkozik a szabályos sokszögekkel. Itt is a 3, 4, és 6 oldalú sokszögon tapasztalt törvényszerűséget, terjeszti ki szellemesen, a csillagsokszögek segítségével tetszőleges oldalú szabályos sokszögre.

Az egység sugarú, körbeírt szabályos n -szög oldalát a_n -nel jelölve, amint azt jól tudjuk,

$$a_3 = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2} = 3^{\frac{1}{2}}, \quad a_4 = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \\ a_6 = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Eszerint

$$a_3^2 = 3, \quad a_4^2 = 2, \quad \text{míg} \quad a_6^2 = 1.$$

Szabályos 5-, 8- és 12-szögre már nem adódik ilyen egyszerű eredmény:

$$a_5^2 = \frac{5^{\frac{1}{2}}(5^{\frac{1}{2}} - 1)}{2}, \quad a_8^2 = 2 - 2^{\frac{1}{2}}, \quad a_{12}^2 = 2 - 3^{\frac{1}{2}},$$

Rados azonban ügyes fordulattal számbaveszi a csillagsokszögeket is. Ezekből 5, 8 és 12 oldalú csak egy-egy van. Ezek a'_5 , a'_8 , ill. a'_{12} oldalaira

$$a'^2_5 = \frac{5^{\frac{1}{2}}(5^{\frac{1}{2}} + 1)}{2}, \quad a'^2_8 = 2 + 2^{\frac{1}{2}}, \quad a'^2_{12} = 2 + 3^{\frac{1}{2}},$$

²RADOS G. Adalék a szabályos sokszögek elméletéhez. *Math. és Term. tud. Ért.* 41., 1924., 109–114. old. – Contribution a la théorie des polygones réguliers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 49., 1925. 1–4. old. főleg a 3. és 4. oldalán.

és így

$$(a_5 a'_5)^2 = 5, \quad (a_8 a'_8)^2 = 2, \quad (a_{12} a'_{12})^2 = 1.$$

Ebből Rados a következő általános tételt olvassa le, és be is bizonyítja:

Az egységkörbe írható különböző szabályos n -szögek (betudva a csillagsokszögeket is) oldalai mérőszámainak négyzetével alkotott szorzat p -vel egyenlő, ha p az egyetlen prímszám, amellyel n osztható és 1-gyel egyenlő, ha n egynél több prímszámmal osztható.

A bizonyítás ismertetésére itt szintén nem térek ki.

Rados egész elemi geometriai problémákkal is foglalkozott. Ő is adott például egy bizonyítást³ arra az ismert tételre, hogy a hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek közül (amelyeknek egy-egy csúcsa az adott háromszög egy-egy oldalán van) a magassági talppontok háromszögének van a legkisebb kerülete.

Teljesen az elemi analitikus geometriához tartozik Radosnak a következő öregkori vizsgálata a kör egyenletéről.⁴ Ha 3 pont $p_i (i = 1, 2, 3)$ koordinátái x_i, y_i , akkor könnyen látható, (a bizonyítást az olvasóra bízom), a 3 ponton átmenő kör egyenlete a következő alakban írható:

$$(6) \quad k(x, y) = \begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

hacsak a $k(x, y)$ determináns első sorának elemeihez tartozó al-determinánsak nem mindannyian a 0-sal egyenlők, amikor az egyenlet a semmitmondó

$$0 = 0$$

azonosságba megy át. Rados kimutatja, hogy *ez az eset akkor és csak akkor következik be, amikor a kör meghatározására megadott 3 pont közül legalább kettő összeesik, minden egyéb esetben (6) valóságos egyenlet.*

A bizonyítást bemutatom, hasznos gyakorlat lesz a determinánsokkal való számolásban.

Ha a $k(x, y)$ determináns első sorához tartozó al-determinánsok mindannyian 0-sal egyenlők, akkor persze az első sor első eleméhez tartozó al-determináns is 0, tehát

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a három P_i pont ugyanazon az egyenesen fekszik.

Ha a három pont egybeesik, nincs mit bizonyítanunk, ha van köztük két különböző, akkor a kérdéses egyenesnek egyenlete $ax + by + c = 0$ alakú, ahol a és b közül legalább az egyik nem 0. Ha pl. $b \neq 0$, akkor az egyenlet a

$$(7) \quad y = mx + b$$

alakban is írható. (Ha $b = 0$, akkor csak x és y szerepét kell megcserélni.)

Mivel (6)-ban az első sor minden eleméhez tartozó al-determináns, így a harmadik elemhez tartozó is, vagyis – tekintetbe véve, hogy a P_i pontok koordinátái kielégítik a (7) egyenletet – azt kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 + m^2 x_1^2 + 2mbx_1 + b^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2 + m^2 x_2^2 + 2mbx_2 + b^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2 + m^2 x_3^2 + 2mbx_3 + b^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

vonjuk le a második oszlop. $2mb$ -szeresét és a harmadik b^2 -szeresét az elsőből. Tudjuk, hogy ezáltal a determináns értéke nem változik. Ekkor az első oszlop minden elemében szereplő $m^2 + 1$ tényező a determináns elé kiemelhetjük, és azt kapjuk, hogy

$$(m^2 + 1) \begin{vmatrix} x_1^2, & x_1, & 1 \\ x_2^2, & x_2, & 1 \\ x_3^2, & x_3, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha a determináns értéke 0. A determináns azonban $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ alakban is írható. (A bizonyítást az olvasóra bízom.) Így a fenti összefüggés azt jelenti, hogy van a pontok között kettő, amelynek az abszcisszája egyenlő. Mivel pedig mindkettő koordinátái kielégítik a (7) egyenletet, ezért ordinátáik is megegyeznek, s így a két pont egybeesik. Ezt kellett bizonyítanunk.

³RADOS G.: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása. *Math. és Phys. Lapok* 2., 1893. 109–117. old. – Ld. még a következő cikket: BERKES JENŐ: A talpponti háromszögről. *Lapunk* XII., 1956. 66–72. old.

⁴RADOS G.: Három pontjával meghatározott kör és négy pontjával meghatározott gömb egyenletéről. *Mat. Termtud. Ért.* 60., 1941., 1–8. old.

Rados hasonló tételt mond ki és bizonyít be a gömbre is. További eredményei közül még csak egyet említek⁵. A

$$T_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \\ \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

alakú kifejezéseket trigonometrikus polinomoknak nevezzük. Rados róluk a következő tételt bizonyította be.

Ha az

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b_1, b_2, \dots, b_n$$

együtthatók mindannyian egész számok, ha továbbá a

$$T_n(x) = 0$$

trigonometrikus egyenlet összes gyökei valós számok, akkor ezek mindannyian a π -nek (LUDOLF-féle szám) racionális többszörösei (a szöveget ívmértékben mérve).

Radosnak a felemlítetteken kívül is számos dolgozata van, de tárgyük kívül esik ifjú olvasóink érdeklődési körén.

*

Az eddigiekben mindig csak a matematikusról volt szó, aki még késő aggkorában is dolgozott; bemutatott analitikus geometriai tételét a kör és gömb egyenletéről 79 éves korában közölte. A róla alkotott kép nem lenne teljes, ha meg nem emlékeznénk tudományos életünkben betöltött szerepéről, szervező képességeiről és a kiváló tanárról. Nagy tekintélyét ismételten felhasználta arra, hogy a mindinkább terpeszkedő faszizmus tudományellenes intézkedései ellen tiltakozzék, pl. az ún. „zsidótörvény” ellen a magyar értelmiség színe-java tiltakozott, a nyilatkozat aláírói között találjuk Rados Gusztávot is. Mint a Matematikai és Fizikai Társulat elnöke szinte tüntetésképpen választotta meg a mind jobban térthódító faszizmus elől külföldre távozott két fiatal elsőrangú magyar matematikust (RADÓ TIBORT az Ohio állambeli Columbus egyetem és NEUMANN JÁNOST, a hírneves princetoni egyetem világhírű tanárait) a Társulat tiszteletbeli tagjainak.

Szólnom kell még a nagyszerű tanárról. Említettem már, hogy egész pályafutása alatt mint a műegyetem tanára működött. Világos, jól érthető előadása a hallgatóság sorában igen kedvelt volt, és nagyban hozzájárult a matematika népszerűsítéséhez a magyar mérnöki karban, egyben jelentékenyen emelte a mérnökök tudományos színvonalát. A mai idősebb mérnökmenzdek (az építészek és vegyészek kivételével) mind az ő tanítványa volt. Az idősebb középiskolai matematikai tanárok is tőle tanulták a számelmélet és a funkcionális algebra elemeit. Meg vagyok győződve, hogy minden volt tanítványa – számuk tízezrekre rúg – szeretettel gondol rá.

Rados Gusztávban tehát az akkor virágzóban levő matematikai élet egyik kiváló egyéniségével ismerkedtünk meg.

⁵RADOS G.: Egész együtthatós trigonometrikus polynomok egy nevezetes tulajdonsága. *Math. és Phys. Lapok* 28., 1922., 27–29. old. – Ugyanez franciául: Sur une propriété remarquable des polynomes trigonométriques a coefficients entiers. *Rendiconti del Corcolo Matematico di Palermo*. 47., 1923., 62–64. old.