

Alább közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

I. forduló

1. feladat. Valamely iskolában az év elején a leánytanulók létszáma 51-gyel kisebb, mint a fiúké. Év közben kimaradt 19 fiú és 41 lány, aminek következtében a év végén a lányok létszáma az összlétszám százalékában kifejezve 4 %-kal kisebb, mint az év elején volt. Hány fiú- és hány lánytanuló volt az év elején?

Megoldás: Jelöljük x -szel a lányok számát az év elején. Ekkor a lányok és fiúk száma az év elején, illetőleg év végén x és $x + 51$, illetőleg $x - 41$ és $x + 32$. A lányok számát az összlétszám százalékában kifejezve a feladat feltétele a következő egyenletre vezet:

$$\frac{100x}{2x + 51} = \frac{100(x - 41)}{2x - 9} + 4.$$

Az egyenletet 4-gyel osztva, a törtet eltávolítva és 0-ra redukálva, nyerjük, hogy gyökei megegyeznek a

$$-4x^2 + 466x + 52\,734 = 0,$$

vagy a

$$2x^2 - 233x - 26\,367 = 0$$

egyenlet gyökeivel, feltéve, hogy utóbbiak különböznek az eltávolított nevezők gyökeitől. A nyert egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van, amelyek közül csak az előbbi felel meg a feladat feltételeinek, tehát a lányok száma az év elején

$$x = \frac{233 + \sqrt{54\,289 + 210\,939}}{4} = \frac{233 + 515}{4} = 187,$$

(ami valóban nem gyöke az eltávolított nevezőknek), a fiúk száma pedig 238 volt. (A lányok év elején az összes tanulók 44 %-át, az év végén a tanulók 40 %-át tették ki.)

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$n^6 - n^2$$

osztható 60-nal, ha n természetes szám.

Megoldás: A vizsgálandó kifejezés

$$n^2(n^4 - 1) = (n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)n(n^2 + 1).$$

Ha n egész szám, akkor itt az első három tényező három szomszédos egész szám. Ezek közül valamelyik osztható 3-mal.

Ha n páratlan, akkor az első és harmadik tényező, ha páros, akkor a második és negyedik osztható 2-vel, a szorzat tehát osztható 4-gyel.

Az első három tényező közül valamelyik osztható 5-tel is, ha n osztható 5-tel, vagy szomszédos egy 5-tel osztható számmal. Ha viszont n egy 5-tel osztható szám második szomszédja: $n = 5k + 2$, akkor az utolsó tényező

$$n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$$

osztható 5-tel.

Az $n^6 - n^2$ kifejezés tehát minden egész n -re osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Ebből következik, hogy 60-nal is osztható,¹ mert minden szám 60-nal osztva

$$60h + m$$

alakban írható, ahol $0 \leq m \leq 59$ a maradék. Mivel az első tag osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel, az összeg csak úgy lehet mindegyik számmal osztható, ha m is osztható mind a hárommal.

Csak a 0-ra és 5-re végződő számok oszthatók 5-tel és ezek közül is csak 0-ra végződők lehetnek 4-gyel oszthatók, tehát m lehetséges értéke csak

$$0, 10, 20, 30, 40, 50.$$

Ezek közül csak 0 és 30 osztható 3-mal, de az utóbbi nem osztható 4-gyel, tehát $m = 0$ és így minden 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható szám osztható 60-nal is. Ezzel bizonyítottuk a tétel állítását.

Megjegyzés. Az, hogy a 3-mal, 4-gyel és 5-tel való oszthatóságtól a szorzatukkal 60-nal való oszthatóságra következtethetünk, azon múlik, hogy e három szám közül semelyik kettőnek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Nem volna nehéz a kifejezés 4-gyel, 5-tel és 6-tal való oszthatóságát kimutatni, ebből sem következtethetnénk $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ -szal való oszthatóságra, amint hogy a kifejezés $n = 2$ -re 60-at ad és ez mindjárt nem osztható 120-szal. Ebbe a hibába

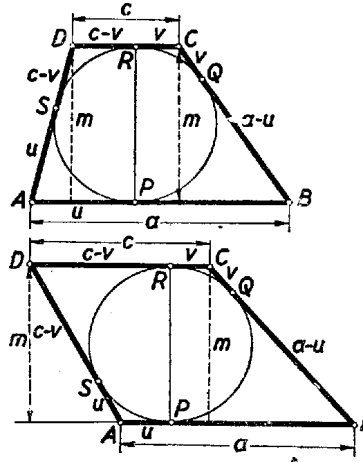
¹Hivatkozhatnánk egyszerűen arra a tételre, hogy ha egy egész szám osztható olyan egész számokkal, amelyek páronként relatív prímek egymáshoz, akkor osztható ezek szorzatával is. A következő megfontolás azonban azt mutatja, hogy ezt konkrétan adott számok esetén könnyű közvetlenül igazolni.

többet beleestek, hogy két számmal való oszthatóságból a szorzatukkal való oszthatóságra következtettek, nem törődve a tényezők közös osztóival.

3. feladat. Legyen az $ABCD$ trapéz érintőnégyyszög. ($AB \parallel CD$). A beírt körhöz az átellenes A és C csúcsból húzott érintőszakaszok hossza legyen u ill. v . Bizonyítandó, hogy

$$u \cdot CD = v \cdot AB.$$

I. megoldás: Jelöljük az AB és CD oldalak hosszát a -val és c -vel, az AB , BC , CD , DA oldalakon levő érintési pontokat P , Q , R , S -sel. Bocsássunk merőlegest a C és D pontokból az AB egyenesre (1. ábra).



1. ábra

Két derékszögű háromszög keletkezik, melyek átfogója a BC , ill. DA oldal, egyik befogója a trapéz m magasságával, másik pedig a BP és CR , illetőleg a DR és AP érintőszakaszok különbségének abszolút értékével egyenlő. Mivel a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, így

$$BP = BQ = a - u, \quad DR = DS = c - v,$$

tehát a derékszögű háromszögekre Pythagoras tételét alkalmazva

$$\begin{aligned} (a - u + v)^2 &= m^2 + |a - u - v|^2, \\ (u + c - v)^2 &= m^2 + |u - (c - v)|^2. \end{aligned}$$

Miután egy számnak és negatívjának a négyzete megegyezik, az abszolútérték-jeleket elhagyhatjuk. A második egyenletet az elsőből levonva az

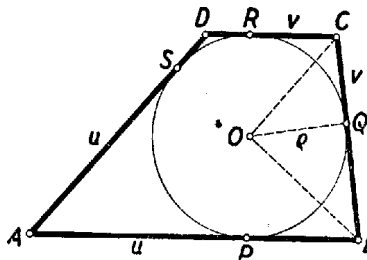
$$[a - (u - v)]^2 - [c + (u - v)]^2 = [a - (u + v)]^2 - [(u + v) - c]^2$$

összefüggéshez jutunk. Ebből a zárójelek felbontása és rendezés után kapjuk, hogy

$$4av = 4cu,$$

ami egyenértékű a bizonyítandó összefüggéssel.

II. megoldás: A beírt kör O középpontja a trapéz szögfelezőinek metszéspontja. Mivel a trapéz B -nél és C -nél levő szögeinek összege 180° , azért a BOC háromszög B -nél és C -nél levő szögeinek összege 90° , és így a háromszög O -nál derékszögű (2. ábra).



2. ábra

Az átfogóra bocsátott magasság a beírt kör sugara, ϱ . Így a derékszögű háromszögre vonatkozó középarányossági tételek szerint

$$\varrho^2 = BQ \cdot CQ.$$

Hasonlóan adódik a DOA háromszögből, hogy

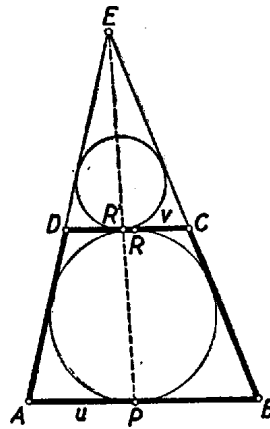
$$\varrho^2 = DS \cdot AS,$$

tehát a jobb oldalak is egyenlők. Felhasználva ezt és azt, hogy körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} u \cdot CD &= AS(DR + RC) = AS(DS + v) = AS \cdot DS + AS \cdot v = BQ \cdot CQ + \\ &+ AS \cdot v = BP \cdot v + AP \cdot v = AB \cdot v, \end{aligned}$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

III. megoldás: Az állítás nyilvánvaló, ha $BC \parallel DA$, ezért feltehetjük, hogy a BC és DA oldalaknak mondjuk a C -n és D -n túli meghosszabbításai metszik egymást egy E pontban. Érintse a trapézba írt kör a párhuzamos oldalakat a P és R pontban, a CDE háromszögbe írt kör pedig a CD oldalt az R' pontban (3. ábra).



3. ábra

A trapézba írt kör a CDE háromszögnek hozzáírt köre, és egyben az ABE háromszögnek beírt köre. Ismeretes, a hozzáírt és beírt körre nézve a

$$CR = DR'$$

összefüggés.

Mivel az ABE és DCE háromszögek hasonlóak és R' és P e hasonlóságnál egymásnak megfelelő pontok, így fennáll az

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{DR'} = \frac{AP}{CR} = \frac{u}{v}$$

összefüggés, ami a bizonyítandó állításnak csak átrendezett alakja.

Megjegyzések. Sokan abból kiindulva bizonyították a tételt, hogy a párhuzamos oldalak érintési pontjait összekötő egyenes átmegy az átlók metszéspontján, vagy, hogy érintőnégyyszögben az átlók és a szemközi oldalakon levő érintési pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül. Ez az állítás ugyan igaz, de bizonyítása sokkal nehezebb, mint a feladat állításáé. Mások viszont abból a hamis állításból indultak ki, mely szerint két négyszög hasonló volna, ha megfelelő szögeik egyenlők.

II. forduló

1. feladat. Négy egész szám összege 36. Egy bizonyos n egész számot hozzáadva az első számhoz; n -et kivonva a második számból; n -nel szorozva a harmadik számot, és n -et osztva a negyediket, egyenlő eredményre jutunk. Melyik ez a négy szám, és mekkora n ?

Megoldás: A négy számot x , y , z , u -val jelölve feltétel szerint

$$(1) \quad x + y + z + u = 36$$

$$(2) \quad x + n = y - n = z \cdot n = \frac{u}{n}.$$

Célszerű (2)-ből a két ismeretlennel fejezni ki a többi, amelyikkel ez csupán összeadás, kivonás, és szorzás segítségével sikerül; ez a z és n lesz, melyek szorzata szerepel (2)-ben:

$$x = zn - n, \quad y = zn + n, \quad u = zn^2,$$

és (1) bal oldalába beírva e kifejezéseket, a

$$2zn + z + zn^2 = z(n+1)^2 = 36$$

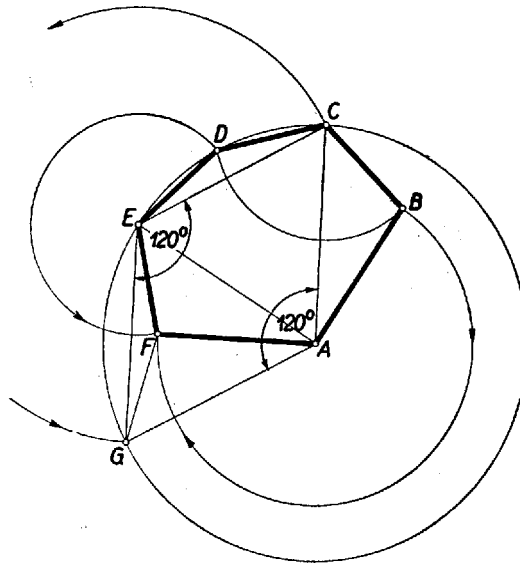
egyenletet kapjuk. Innen $(n+1)^2$ csak 1, 4, 9 vagy 36 lehet. Az ismeretlenek lehetséges értékeit az alábbi táblázatban tüntettük fel (tekintetbe véve, hogy az $n = 0$ értéket ki kell zárunk).

$(n+1)^2$	1	4	9	36
$n \dots$	-2	1	-3	2
$z \dots$	36	9	9	4
$x \dots$	-70	8	-24	6
$y \dots$	-74	10	-30	10
$u \dots$	144	9	81	16

Megjegyzés. Ha más két ismeretlennel fejezzük ki a többi, akkor is egész hasonlóan történhet a megoldás, csak nehezebbé válhat a szorzattá alakítás lehetőségének megtalálása. Emellett külön kell diszkutálni nevezőbe kerülő kifejezések eltűnésének az esetét is.

2. feladat. Egy hatszög minden második szöge 120° -os, és két-két 120° -os szöget bezáró oldala egyenlő. Bizonyítandó, hogy a 120° -os szögek csúcsai szabályos háromszöget alkotnak.

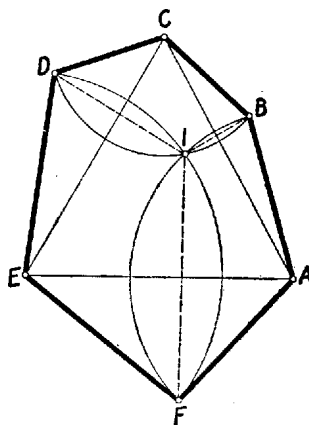
I. megoldás: Legyenek az $ABCDEF$ hatszög A , C és E csúcsoknál levő szögei 120° -osak. Ekkor a másik három szög összege is 360° ; mert a hatszög szögeinek összege 720° . Így az ABC háromszöget A körül elforgatva, míg AB a vele egyenlő AF oldalra kerül és hasonlóan a CDE háromszöget E körül ED oldalával EF -re forgatva, a BC és DC oldalak egy egyenesre fognak kerülni (4. ábra), és mivel a két oldal egyenlő, a C csúcs a két forgatásnál ugyanabba a G pontba kerül.



4. ábra

A keletkező AEG háromszög az AEC háromszög tükörképe az AE egyenesre nézve. Az elforgatás folytán keletkezett CAG és CEG szögek 120° -osak, s így az AE szimmetriatengely az AC és EC oldalakkal 60° -os szöget zár be, az ACE háromszög tehát szabályos.

II. megoldás: a) Az állítást konvex hatszögre igazoljuk. Az előző megoldás jelöléseit használva rajzoljunk A középpontú körívet F -en és B -n át a (120°) -os FAB szög szárai közé és hasonlóan C középpontú kör a BCD szög szárai közé B -n és D -n át. A két körívről az FB , ill. BD szakasz 120° alatt látszik, mert a látószögek 240° -os középponti szöghöz tartozó kerületi szögek. (5. ábra).



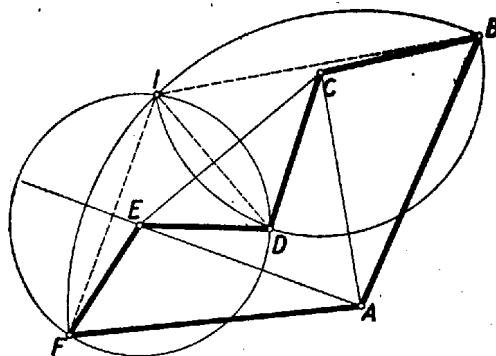
5. ábra

Belátjuk, hogy a két körív metszi egymást. A D pont az FAB 120° -os szögtérben van, mert a hatszög konvex, továbbá az FB köríven kívül, mert különben az FDB szög legalább 120° -os volna. Mivel a BCD és DEF egyenlőszárú háromszögek szárai közti szög 120° , így ezeknek a D -nél levő szárai 30° -osak, tehát a hatszög D -nél levő szöge 180° -nál nagyobb volna, de ez lehetetlen, mert a hatszög konvex. Ugyanígy következik, hogy az F pont a BCD 120° -os szögtérben van, a BD köríven kívül. A BD körív az FAB körcikk belsejébe indul a B pontból, mert az ABC szög a hatszög konvex volta miatt 180° -nál kisebb. Így a két körív valóban metszi egymást egy I pontban. Ez a pont B tükörképe az AC egyenesre.

Az I pontból, mint láttuk, az FB és BD szakasz 120° -os szög alatt látszik, s így ugyanakkora szögben látszik a DF szakasz vagyis az E középpontú, D -n és F -en áthaladó kisebb körív is átmegy I -n. Ebből következik, hogy az I pont D -nek is tükörképe a CE egyenesre és F -nek is tükörképe az EA egyenesre.

Az ACE háromszög oldalai a bizonyítottak szerint merőlegesek, az egymással 120° -os szöget bezáró, IB , ID és IF szakaszokra s így szabályos háromszöget alkotnak.

b) Ha a hatszögben pl. a D csúsnál levő szög 180° -nál nagyobb, akkor D az FAB körcikkben van, s így a BD és DF körívek meghosszabbítása metszi az FB ívet egy közös I pontban (6. ábra).

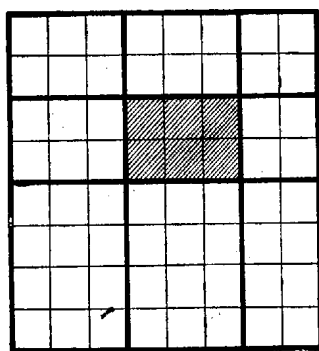


6. ábra

A bizonyítás ez esetben az előbbihez teljesen hasonló módon fejezhető be.

3. feladat. Hány téglalap látható a sakktáblán? Ezek közül hány négyzet?

Megoldás. Ha meghosszabbítjuk egy téglalap függőleges oldalait, kapunk a sakktáblán egy függőleges sávot. Hasonlóan a vízszintes oldalak egy vízszintes sávot határoznak meg. Fordítva, ha megadunk egy sakktáblamezőket elválasztó egyenesek határolta függőleges sávot és egy vízszinteset a sakktáblán, ezek egyértelműen meghatároznak egy téglalapot (7. ábra).



7. ábra

Így az összes téglalapok száma a függőleges és a vízszintes sávok számának szorzata.

Világos, hogy ugyanannyi a függőleges és a vízszintes sávok száma, tehát elegendő pl. az előbbieket összeszámolni. A sakktábla mezőit 9 függőleges egyenes határolja.

Ezek közül 9-féleképpen választhatjuk ki az első határvonalat, és 8-féleképpen a maradék közül a másodikat. Így azonban minden sávot kétszer, kapunk meg, tehát a függőleges sávok száma

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Ugyanannyi a vízszintes sávok száma is, tehát az összes téglalapok száma

$$36^2 = 1296.$$

Ezek között annyi négyzet van, ahányféleképpen ugyanolyan szélességű függőleges és vízszintes sávot párosíthatunk.

Egy h szélességű függőleges sáv baloldali határa nem lehet az utolsó h függőleges egyenes egyike sem, tehát a h szélességű sávok száma $9 - h$, ennyi a vízszinteseké is, s így $(9 - h)^2$ olyan négyzet van, amely h mező szélességű. Tehát a négyzetek száma $(h = 1, 2, \dots, 8) \ 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$.