

Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai:

1. feladat. Mennyi a %-os alkoholt kell hozzátöltenünk b liter c %-os alkoholhoz, hogy d %-os alkoholt kapjunk?

Megoldás: Nyilvánvalóan csak akkor várható megoldása a feladatnak, ha d az a és c közé eső érték. Általában p %-os alkohol azt jelenti, hogy m liter oldatban

$$\frac{p \cdot m}{100}$$

liter alkohol van. Így, ha a b liter c % alkoholhoz x liter a %-os alkoholt adva, a keletkezett $b + x$ liter d %-os lesz, ekkor az alkoholtartalmat kétféleképpen kiszámítva

$$\frac{bc}{100} + \frac{ax}{100} = \frac{(b+x)d}{100}.$$

Innen, ha $d \neq a$

$$x = b \frac{d - c}{a - d}.$$

Ez x -re akkor ad pozitív értéket, ha $a - b$ és $d - c$ egyező előjelű, ami éppen azt jelenti, hogy d az a és c közé esik.

2. feladat. Szerkesszünk háromszöget, ha ismeretes a kerülete (k), egyik oldala (c), és a másik két oldallal szemközi szögek különbsége ($\alpha - \beta$).

Megoldás: Jelöljük az adott szögműködéséget δ -val. Ha a c oldal és a kerület adott, akkor ismert a másik két oldal összege $a + b$ is. A szerkeszthetőséghez természetesen szükséges, hogy

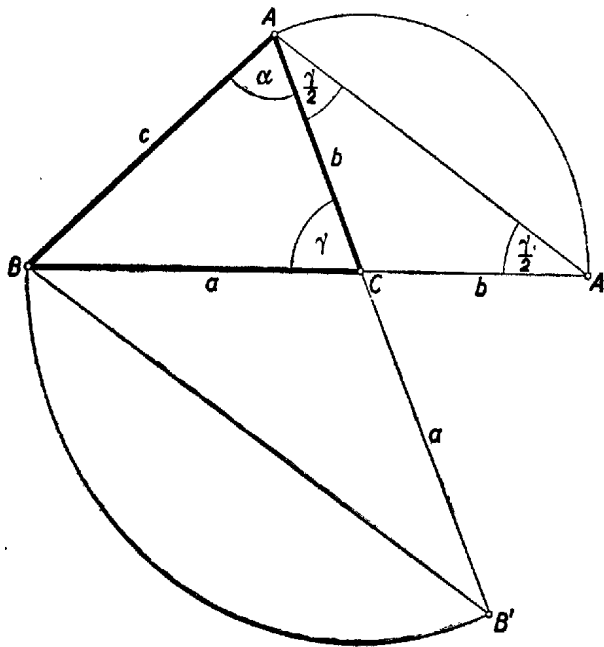
$$a + b = k - c > c,$$

azaz

$$2c < k$$

legyen.

Forgassuk rá egy tetszőszerinti ABC háromszögben pl. a $BC = a$ oldal meghosszabbítására a $CA' = b$ oldalt (1. ábra).



1. ábra

A keletkezett ACA' egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő külső szöge az ABC háromszög γ szöge, így az AA' alapon fekvő szögek $\frac{\gamma}{2}$ nagyságúak.

Számítsuk ki a keletkező ABA' háromszögben az A -nál levő szöget:

$$\angle ABA' = \alpha + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{180^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\delta}{2}.$$

Az $AA'B$ háromszögben ismert tehát két oldal és a nagyobbikkal szemközi szög, így ez egyértelműen megszerkeszthető. Az AA' oldal felező merőlegese metszi ki az $A'B$ oldalból a C pontot (2. ábra).

A II. forduló feladatai:

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

bármilyen pozitív vagy negatív (esetleg 0) számokat jelentsen a, b, c, d . Mikor érvényes az egyenlőség jele?

Megoldás: Képezzük a két oldal különbségét

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0,$$

a, b, c, d minden számbajövő értékére. Egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha

$$ad = bc.$$

Megjegyzés. 1. A bizonyítás a következő azonosság levezetésével történt:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Ebből az itt bizonyított egyenlőtlenség mellett egy számelméleti érdekesség is leolvasható: ha itt a, b, c, d egész számokat jelentenek, akkor az azonosság azt fejezi ki, hogy ha két egész szám kifejezhető két négyzetszám összegeként ($m = a^2 + b^2$ és $n = c^2 + d^2$), akkor a szorzatuknak is megvan ez a tulajdonsága. Ez lényeges segítséget nyújt annak a kérdésnek vizsgálatában, hogy mely számok állíthatók elő két négyzetszám összegeként (lásd idevonatkozóan pl. Matematikai Versenytételek II. részben az 1938. évi 1. feladathoz fűzött jegyzetet).

2. Könnyen igazolható a felhasznált azonosság következő általánosítása:

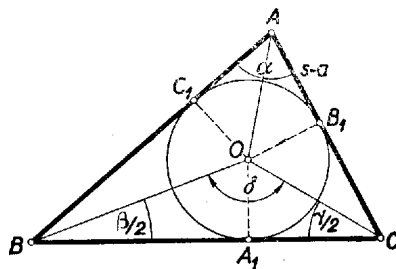
$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \dots + (a_1b_k - a_kb_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \dots + (a_kb_{k-1} - a_{k-1}b_k)^2$,
amiből leolvashatjuk az

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2$$

nevezetes Cauchy-féle egyenlőtlenséget. Itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a b_i -k a megfelelő a_i -ből minden egyes i -re ugyanazon c számmal való szorzással keletkeznek.

2. feladat. Szerkesszünk háromszöget, ha adva van a kerülete $2s$, a beírt kör sugara ϱ , és szögeik szöge α .

I. megoldás: Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C , az ezeknél fekvő szögek α, β, γ . Mivel a beírt kör O középpontját a szögfelező metszéspontja adja, ezért az $a = BC$ oldal látószöge az O pontból (3. ábra)



3. ábra

$$(1) \quad \delta = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

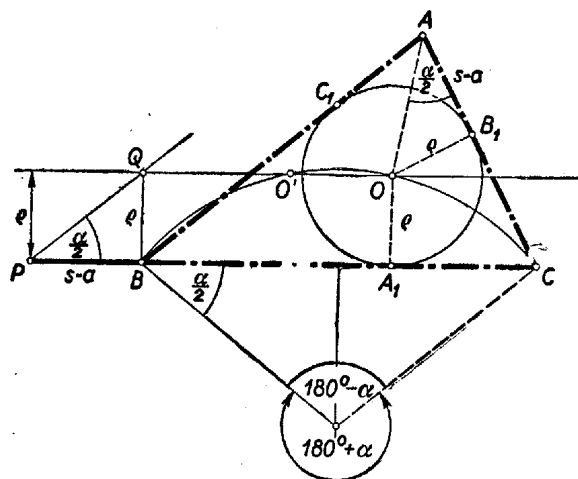
Ez a szög tehát α ismeretében megszerkeszthető. Azt is tudjuk, hogy O a BC oldaltól ϱ távolságra van, így a szerkesztés elvégezhető, ha a -t meg tudjuk szerkeszteni. Legyenek a beírt kör érintési pontjai a BC, CA, AB oldalon A_1, B_1, C_1 , akkor ismeretes, hogy

$$(2) \quad AB_1 = AC_1 = s - BC = s - a.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintő egyenlő volta miatt)

$$s = AB_1 + BC_1 + CA_1 = AB_1 + CA_1 + A_1B = AB_1 + a.)$$

Ezzel a következő szerkesztéshez jutottunk: Rajzoljunk $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, csúcspontját jelöljük P -vel (4. ábra).



4. ábra

Húzzunk az egyik szárával párhuzamos egyenest ρ távolságban, amely metszi a másik szárát egy Q pontban. Az előbbi szárra mérjük rá a P csúctól a $PC = s$ távolságot, a Q -ból PC -re bocsátott merőleges talppontja legyen B . Rajzoljuk meg azt a körívet, amelyből a BC szakasz $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik. Messe ez az először húzott párhuzamost O és O' pontokban. Rajzoljunk pl. O körül ρ sugarú kört. Az ehhez B -ből és C -ből húzott érintők A metszéspontja lesz a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (E két érintő szükségképpen metszi egymást, a BC ugyanazon az oldalán, amelyen a kör van. Ugyanis ezen érintőknek a BC szakasszal bezárt, a kör oldalán fekvő szögei $2 \cdot OBC <$, illetőleg $2 \cdot OCB <$, és e két szög összege $180^\circ - \alpha$.)

Csak az így kapott háromszög felelhet meg a feladat feltételeinek, tehát nincs megoldása a feladatnak, ha a látókörv nem metszi a ρ távolságban húzott párhuzamost.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert beírt körének sugara ρ , ennek a középpontjából a BC oldal $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, s így az A csúcsnál fekvő α' szögére (1) szerint

$$90^\circ + \frac{\alpha'}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha' = \alpha.$$

Végül a beírt kör érintési pontját a CA oldalon B_1 -gyel jelölve, a szerkesztett háromszög s' kerületére (2) szerint

$$s' = AB_1 + BC.$$

De az AOB_1 és PQB derékszögű háromszögek egybevágók, mert A -nál, illetőleg P -nél fekvő hegyesszögük $\frac{\alpha}{2}$, és az ezzel szemkötti befogó mindkét háromszögben ρ . Így

$$AB_1 = PB.$$

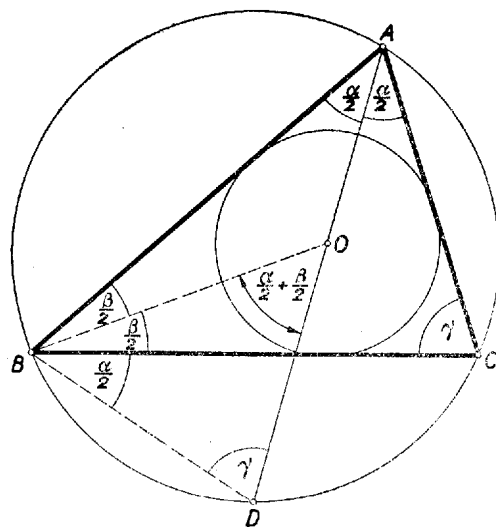
Ennélfogva

$$s' = PB + BC = s$$

a szerkesztés szerint.

Ha O helyett az O' -ből kiindulva fejezzük be a szerkesztést, akkor ABC -vel egybevágó megoldást kapunk, mert O és O' szimmetrikus a BC szakaszt felező merőlegesére.

Megjegyzés. Legyen az ABC háromszög köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja D (5. ábra).



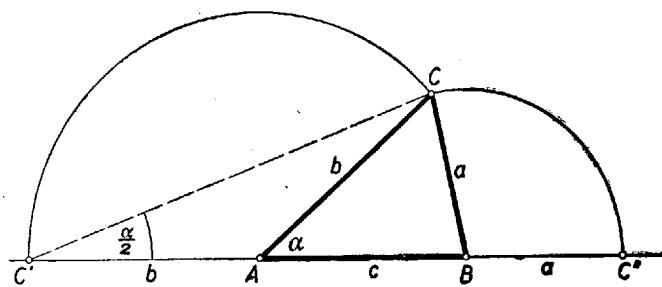
5. ábra

Tudjuk, hogy az A csúcsnál fekvő szög felezője átmegy D -n, és egyszerű szögszámítás adja, hogy a BDO háromszög egyenlő szárú: $DB = DO$. Így B , O és C egy D középpontú körön vannak. Ez éppen a fenti megoldásban használt látókörv.

Mivel a megszerkesztése után, α ismeretében a körülírt kör megszerkeszthető, így a D pont is. E körül B -n és C -n át körívet rajzolva, annak egyik metszéspontját a BC -től ϱ távolságra húzott párhuzamossal kössük össze D -vel. Ez metszi ki a körülírt körből A -t. Többen választották ezt a szerkesztési utat. Ehhez természetesen megfelelően kell módosítani annak bizonyítását is, hogy az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. (Lásd a jelen számban kitűzött 372. gyakorlatot.)

II. megoldás: Forgassuk le egy ABC háromszög oldalait pl. az AB oldal meghosszabbítására (6. ábra)

$$AC' = AC, \quad BC' = BC.$$

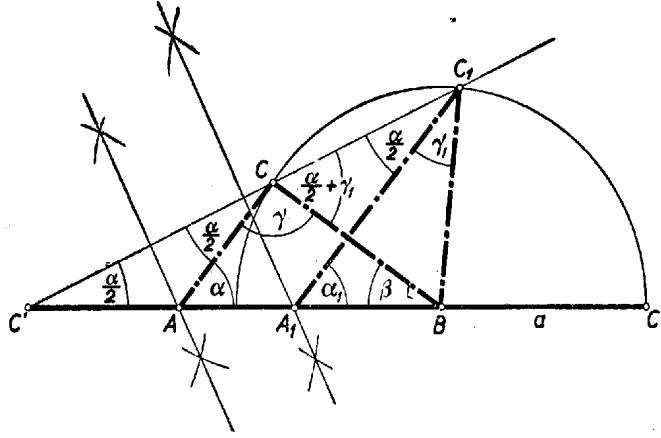


6. ábra

Ha az A csúcsnál levő szög α , akkor a CAC' háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy

$$\angle C'AC = \angle C'CC'' = \frac{\alpha}{2}.$$

Az előző megoldásban láttuk, hogy a $BC = a$ oldal az adatokból megszerkeszthető, így megszerkeszthető a BCC' háromszög is a következő módon: Miután a -t megszerkesztettük, mint az előző megoldásban, mérjük fel egy egyenesre $C'C'' = 2s$ távolságot, ennek C' végpontjában az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, a C'' -től a távolságra levő B pont körül pedig rajzoljunk a sugárral kört (7. ábra).



7. ábra

E körnek a szög másik szárával való valamelyik metszéspontja – ha van ilyen – legyen C . A CC' szakasz felező merőlegese metszi ki a $C'C''$ szakaszból az A pontot.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert szerkesztés szerint a CAC' háromszög egyenlő szárú, így $CA = C'A$, és a háromszög A -nál levő külső szöge

$$\angle CAC'' = 2 \cdot \angle CC'A = \alpha.$$

Ez az ABC háromszög belső szöge kell, hogy legyen. Ugyanis a szerkeszthetőséghez szükséges, hogy $a < s$ legyen. Ez esetben C' az a sugarú B középpontú körön kívül van. Ha a kör és a $C'C$ egyenes másik metszéspontját C_1 -gyel jelöljük, akkor a CC_1 szakasz felező merőlegese B -n megy át; mivel pedig CC' (és C_1C') felezőpontja C' és a C_1C szakasz felezőpontja közé esik, így A -nak is C' és B közé kell esnie. $\angle CAC''$ tehát az ABC háromszögnek valóban belső szöge. A háromszög kerülete:

$$CA + AB + CB = C'A + AB + BC'' = 2s.$$

Így az I. megoldás (1) szerint a beírt kör érintési pontja A -tól $s - a$ távolságra van. Ebből, mivel a beírt kör középpontja az α szög felezőjén van, a megszerkesztése szerint következik, hogy a beírt kör sugara olyan derékszögű háromszög befogója, melynek ezzel szemkötti szöge $\frac{\alpha}{2}$, a másik befogója pedig $s - a$. Mivel a -t egy ugyanilyen háromszög segítségével szerkesztettük, melynek emellett kérdéses befogója ϱ hosszúságú, így a megszerkesztett háromszög beírt körének sugara ϱ . A háromszög tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Azt állítjuk, hogy ha C helyett C_1 -ből kiindulva szerkesztünk egy A_1BC_1 háromszöget, ez az előbbivel egybevágó lesz (a megfelelt csúcsok A , C és B). Valóban A_1 is C' és B közé esik. Essék mondjuk a C a C' és C_1 pontok közé, és jelöljük az ABC és A_1BC_1 háromszögek szögeit α , β , γ , illetve α_1 , β_1 , γ_1 -gyel. Szerkesztés szerint $\alpha_1 = \alpha$ a megadott szög.

A BCC_1 egyenlő szárú háromszögből

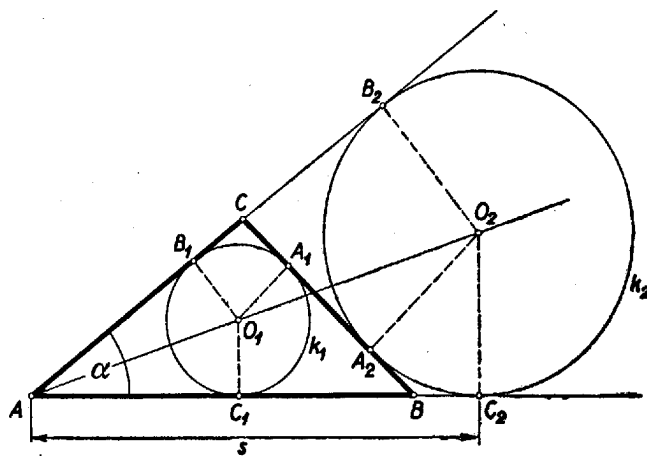
$$\angle BCC_1 = \angle BC_1C = \gamma_1 + \frac{\alpha}{2},$$

így a C -nél keletkező szögek összege

$$180^\circ = \angle C'CA + \angle ACB + \angle BCC_1 = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \gamma_1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma + \gamma_1,$$

tehát $\gamma_1 = \beta$. Az ABC és A_1BC_1 háromszögek tehát hasonlóak, mivel pedig BC és C_1B oldaluk egyenlő, tehát egybevágók is.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög BC oldalához hozzáírt kört is. A betűzést a 8. ábra mutatja.



8. ábra

Ismeretes, hogy ekkor

$$(3) \quad AB_2 = AC_2 = s.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintők egyenlősége folytán

$$2AB_2 = AB_2 + AC_2 = AC + CA_2 + AB + BA_2 = AC + AB + BC = 2s.)$$

Ez a következő szerkesztéshez vezet: Szerkesszünk α nagyságú szöget, csúcsa legyen A , és szerkesszük meg a két szárát érintő ϱ sugarú k_1 kört. Mérjük rá a szög egyik száraára az $AC_2 = s$ távolságot, és szerkesszük meg azt a k_2 kört, amelyik mindkét szárát érinti, egyiket C_2 -ben. Húzzuk meg a két kör egyik közös belső érintőjét, messe ez a szög szárait B és C pontokban.

ABC a keresett háromszög, mert A -nál levő szöge α , beírt körének sugara ϱ , és a (3) összefüggésből következik, hogy kerülete $2s$.

A másik belső közös érintő meghúzása nyilvánvalóan a megszerkesztett egybevágó háromszöghöz vezet.

3. feladat. A községből egy nő 10 óra 31 perckor elindult és egyenletesen haladva 13 óra 43 perckor érkezett B községbe. Ugyanezen a napon B-ből 9 óra 13 perckor indult el egy férfi ugyanazon az úton, és állandó sebességgel 11 óra 53 perckor ért A-ba. Útközben egyszerre értek egy hídhoz, amelyet a nő (miután egymás mellett elhaladtak) 1 perccel később hagyott el, mint a férfi. Mikor értek a hídhoz és hol vannak a híd végpontjai?

I. megoldás: Az egész utat a nő 192 perc alatt tette meg, a férfi 160 perc alatt. Mivel mindketten egyenletesen haladnak, azért ugyanakkora út megtételéhez a nőnek és férfinak szükséges idők aránya mindig

$$\frac{192}{160} = \frac{6}{5}.$$

Jelöljük a híd végigjárásához a férfinak szükséges időt – percekben – t -vel, ekkora nő a feltétel szerint $t + 1$ perc alatt jut át a hídon, és így

$$\frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t} = \frac{6}{5}, \quad t = 5 \text{ perc.}$$

A híd hosszát távolságegységnek választva, az egész út hossza (a férfi menetidejéből számítva)

$$160 : 5 = 32 \text{ hídhossz.}$$

A híd eléréséig a nő és a férfi együtt 31 hídhossznyi utat tett meg. Ha a nő útja ebből x hídhossz volt, akkor, mivel a nő egy hídhosszat 6 perc alatt tesz meg, azért $6x$ idő alatt ért a hídhoz. A férfi 78 perccel korábban indult el, mint a nő, és $(31 - x)$ 5 perccig ment, míg a hídhoz ért. Mivel egyszerre értek a hídhoz, azért

$$6x = (31 - x)5 - 78, \\ x = 7.$$

Eszerint a nő (és ugyanakkor a férfi is) a nő elindulásától számított $6x = 42$ perc múlva ér a hídhoz, vagyis mindketten 11 óra 13 perckor érik el a hidat.

A híd A felőli hídfője 7 hídhossznyira van A -tól és így a másik hídfő 24 hídhossznyira B -től.

II. megoldás: A férfi 160 perc alatt teszi meg az egész utat és 78 perce gyalogol, mikor a nő elindul, tehát megtette már az út

$$\frac{78}{160} = \frac{39}{80}$$

részét, együtt tehát még az út $\frac{41}{80}$ részét teszik meg a találkozásig.

Mivel egyenletesen haladnak, mindketten, így sehségeik aránya

$$\frac{192}{160} = \frac{6}{5},$$

másszóval, ami utat a férfi 5 perc alatt tesz meg, azt a nő 6 perc alatt. Ebből mindjárt az is következik, hogy a hídon is 5, illetőleg 6 perc alatt haladnak át. A fenti arányt úgy is értelmezhetjük, hogy az ugyanazon idő alatt együttesen megtett útnak $\frac{5}{11}$ -ét teszi meg a nő, $\frac{6}{11}$ -ét a férfi. Így az egész útnak A -tól mért

$$\frac{5}{11} \cdot \frac{41}{80} = \frac{41}{176}$$

részénél találkoznak, és ez a hídnak A -tól mért $\frac{5}{11}$ részénél lesz. A híd hossza (a férfi menetidejéből számítva) az egész út

$$\frac{5}{160} = \frac{1}{32}$$

része, így a híd A -hoz közelebb eső vége A -tól az út

$$\frac{41}{176} - \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{32} = \frac{77}{352} = \frac{7}{32}$$

részén, a túlsó vege pedig az út A -tól mért negyedrészére van.

A B -ből induló férfi a hídig terjedő utat, azaz az egész út $\frac{3}{4}$ részét $\frac{3}{4} \cdot 160 = 120$ perc $= 2$ óra alatt teszi meg, tehát mindketten 11 óra 13 perckor érnek a hídhoz.