

Alább közöljük a haladók (II. osztályosok) versenyén kitűzött feladatok megoldásait:

I. forduló

1. feladat: Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}$$

egész szám.

I. megoldás: A gyökjel alatti kifejezések így alakíthatók át: $7 + \sqrt{24} = 6 + 2\sqrt{6} + 1 = (\sqrt{6} + 1)^2$, és hasonlóan $7 - \sqrt{24} = (\sqrt{6} - 1)^2$. Mivel $\sqrt{6} > 1$, így a gyökmennyiségek pozitív értékét véve

$$\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}} = (\sqrt{6} + 1) - (\sqrt{6} - 1) = 2.$$

ami valóban egész szám.

Célhoz érhetünk azonban a felhasznált átalakítás lehetőségének észrevétele nélkül is.

II. megoldás: A vizsgálandó érték pozitív. Számítsuk ki a négyzetét:

$$\left(\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}\right)^2 = 7 + \sqrt{24} - 2\sqrt{49 - 24} + 7 - \sqrt{24} = 14 - 2 \cdot 5 = 4.$$

Így a két gyök különbsége 2, ami valóban egész szám.

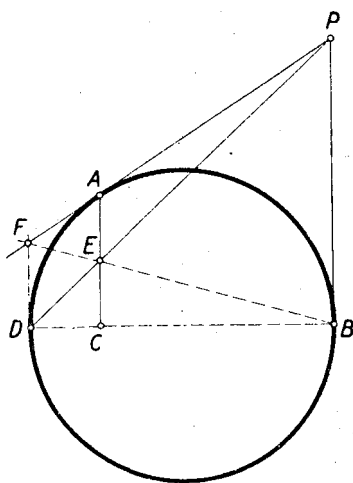
Jegyzet: Hasonlóan belátható, hogy ha $a > 0$ és $0 \leq b \leq a$, akkor

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}\right)^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}.$$

Megjegyzés: A legnagyobb hiba, amit a versenyzők egy része elkövetett az volt, hogy a négyzetgyökök értékét számította ki közelítőleg tizedestörtekben, és így vélte a kívánt igazolást szolgáltatni. – Igen sokan nem vették észre, hogy a vizsgálandó különbség pozitív, és értékének a »–2«-t is megadták.

2. feladat: Adva van egy kör és a körön kívül fekvő P pont. Szerkesszünk P-től a körhöz érintőket, és jelöljük az érintési pontokat A-val és B-vel. A körnek B-vel átellenes pontja legyen D. Bocsássunk az A pontból merőleges egyenest a BD átmérőre, ennek talppontja legyen E. Bizonyítsuk be, hogy a PD egyenes felezi az AC szakaszt.

I. megoldás: Legyen AC és DP metszéspontja E, továbbá messe a PA egyenes a kör D-ben húzott érintőjét F-ben (1. ábra).



1. ábra

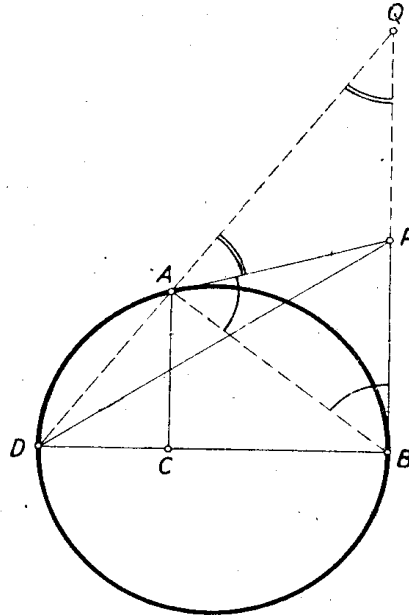
Bebizonyítjuk, hogy E a BPDF trapéz átlóinak metszéspontja. Egyrészt

$$FD = FA \quad \text{és} \quad PA = PB,$$

mint egy pontból húzott érintők. Az átlók metszéspontja az átlókat a párhuzamos oldalak arányában osztja, ugyanúgy, mint A az FP szakaszt, tehát az A-t az átlók metszéspontjával összekötő egyenes párhuzamos a párhuzamos oldalakkal s így azonos az AC egyenessel.

Ismert tétel szerint¹ az átlók metszéspontja felezi a rajta át a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott szakaszt, s így a feladat állítását igazoltuk.

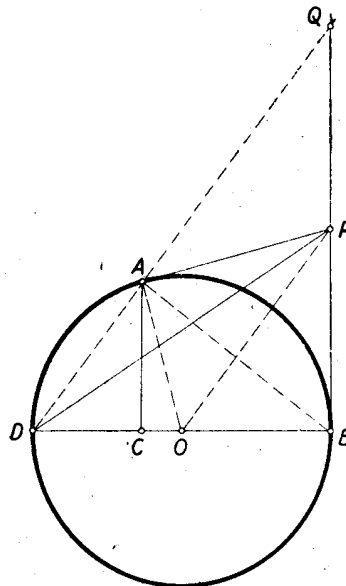
II. megoldás: Messe DA meghosszabbítása BP -t Q -ban (2. ábra).



2. ábra

Mivel az ABP háromszög egyenlő szárú, így az ABQ derékszögű háromszögben a PAQ és PQA szögek egyenlő szögeket pótolnak 90° -ra vagyis az APQ háromszög is egyenlő szárú. Így $QP = PB$, tehát DP a BDQ háromszög súlyvonala, tehát felezi a BQ -val párhuzamos AC szakaszt is, és ez volt a bizonyítandó.

III. megoldás: Az AD egyenes párhuzamos a P pontot a kör O középpontjával összekötő egyenessel (3. ábra).



3. ábra

Ugyanis az AB egyenes merőleges AD -re. Thales tétele szerint, PQ -ra pedig azért, mert utóbbi szögfelezője, az előbbi pedig alapja az APB egyenlőszárú háromszögnek.

Mivel O felezi a BD szakaszt, ezért P is felezi a BP egyenesnek B -től az AD egyenessel való Q metszéspontjáig terjedő szakaszát. DP tehát súlyvonala a BDQ háromszögnek s így felezi a BQ -val párhuzamos AC szakaszt is. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

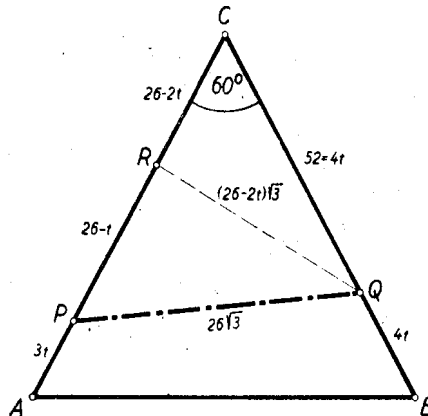
¹Matematika gimnáziumok II. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1953. 30. old.

Jegyzet: AD és PO párhuzamossága sok más úton is belátható, például így: az ADB kerületi szög fele az AOB középponti szögnek (3. ábra). Mivel a két szög B -n átmenő szárai egy egyenesbe esnek, így AD párhuzamos a középponti szög felezőjével, ez pedig a PO egyenes, mert a $PAOB$ négyszög deltoid.

Megjegyzés: Itt a leggyakoribb hiba az volt (mint az a bizonyítási feladatnál általában lenni szokott), hogy a bizonyítandó tétellel egyenértékű állítást használtak fel a versenyzők bizonyítás nélkül. Pl. az 1. ábrában *feltételezték*, hogy BE és FE szakaszok egy egyenesen vannak stb.

3. feladat: Az ABC egyenlőoldalú háromszög oldala 52 m. A háromszög A és B csúcspontjából egyszerre indul egy-egy pont, az AC oldalon 3 m/sec, ill. a BC oldalon 4 m/sec egyenletes sebességgel és halad C -ig. Mikor lesz a két mozgó pont egymástól mért távolsága egyenlő a háromszög magasságával?

Megoldás: Legyen t másodperc múlva az A -ból induló pont helyzete P , a B -ből induló Q . Jelöljük Q vetületét az AC egyenesen R -rel (4. ábra).



4. ábra

Számítsuk ki a PQR derékszögű háromszög befogóit.

$$QC = 52 - 4t,$$

s így a CQR 60° -os derékszögű háromszögből

$$CR = \frac{QC}{2} = 26 - 2t, \quad QR = RC\sqrt{3} = \sqrt{3}(26 - 2t),$$

tehát

$$PR = 52 - 3t - (26 - 2t) = 26 - t.$$

A feladat követelménye szerint PQ -nak $26\sqrt{3}$ méternek kell lennie, ebből a

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = 3(26 - 2t)^2 + (26 - t)^2 = 3 \cdot 26^2, \\ 13t^2 - 14 \cdot 26t + 26^2 = 0$$

egyenlet adódik, vagy 13-mal osztva

$$t^2 - 28t + 52 = 0.$$

Innen

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 26.$$

A második gyök nem jön számításba, mert 26 másodperc múlva már mindkét pont a megfelelő oldal meghosszabbításán mozogna, így 2 másodperc múlva következik be a kívánt helyzet.

Megjegyzés: A versenyzők egy része nem jött rá arra, hogy $CR = \frac{1}{2}CQ$.

II. forduló

1. feladat: Melyik az az időpont 2 és 3 óra között, amelyhez található 6 és 7 óra közötti időpont úgy, hogy a két időpontban az óramutatók állása – felcserélt mutatókkal – megegyezik.

I. megoldás: A mutatóknak az óralapon megtett útját célszerű a teljes körüljárás 60-ad részével (a nagymutató 1 percnyi útjával) vagy 12-ed részével (a kismutató egy órai útjával) mérni.

A 2 és 3 óra közti mutatóállásnál legyen a kismutatónak a 2 órától kezdve megtett útja, a körüljárás 60-ad részében mérve x . Ekkor a kismutató a 12-es számtól $10 + x$ egységre van, a nagymutató pedig $12x$ -nyire.

Ha 6 óra után y egységnyit mozdult el a kismutató a felcserélt mutatókkal ugyanezen álláshoz, akkor a második helyzetben a kismutató $30 + y$ -nyira a nagy pedig $12y$ -nyira van a 12-estől. Feltétel szerint

$$\begin{aligned}10 + x &= 12y, \\12x &= 30 + y\end{aligned}$$

kell hogy legyen. Innen

$$x = \frac{370}{143} = 2\frac{84}{143}, \quad y = \frac{150}{143} = 1\frac{7}{143}.$$

Tehát a keresett időpont

$$2 \text{ óra } 31\frac{7}{143} \text{ perc } (\approx 31 \text{ p } 2,9 \text{ mp}).$$

A megfelelő időpont 6 és 7 óra között

$$6 \text{ óra } 12\frac{84}{143} \text{ perc } (\approx 12 \text{ p } 35,2 \text{ mp}).$$

II. megoldás: Az ismeretlenek meghatározására abból is nyerhetünk egyenleteket, hogy bármely időpontban olyan arányban osztja a kismutató a két szomszédos egész órát jelölő szám közti ívet, mint amilyen a 12-es számtól az egyik és másik irányban a nagymutatóig terjedő ívek aránya.

Válasszuk egységnek a teljes kör 12-ed részét, a kérdéses mutatóállásnál legyen az egyik mutató a 2-es szám után x beosztással, a másik a 6-os után y beosztással. Ekkor a fenti megjegyzést a 2 és 3 óra közti időre vonatkoztatva

$$\frac{x}{1-x} = \frac{6+y}{6-y},$$

6 és 7 óra közötti mutatóállást tekintve pedig

$$\frac{y}{1-y} = \frac{2+x}{10-x}.$$

Ezekből

$$12x = 6 + y, \quad 12y = 2 + x.$$

Ha még tekintetbe vesszük, hogy itt a mértékszámok ötödei az előző megoldásban szereplő x és y értékeknek, akkor láthatjuk, hogy lényegében az ott szereplő egyenletrendszert kaptuk vissza.

III. megoldás: Egy ismeretlennel is megoldhatjuk a feladatot. Az első megoldás jelöléseit használva a kis és nagymutató helyét 2 és 3 óra közt a $10 + x$ és $12x$ elfordulások adják most. Ha most a kismutató van 6 és 7 közt a $12x$ helyen, akkor a nagymutató helyzetét a $12(12x - 30)$ elfordulás jelzi, tehát

$$10 + x = 12(12x - 30).$$

Itt tulajdonképpen nem tettünk egyebet, mint hogy okoskodás útján küszöböltük ki az első megoldás egyenletrendszerében szereplő $y (= 12x - 30)$ ismeretlent.

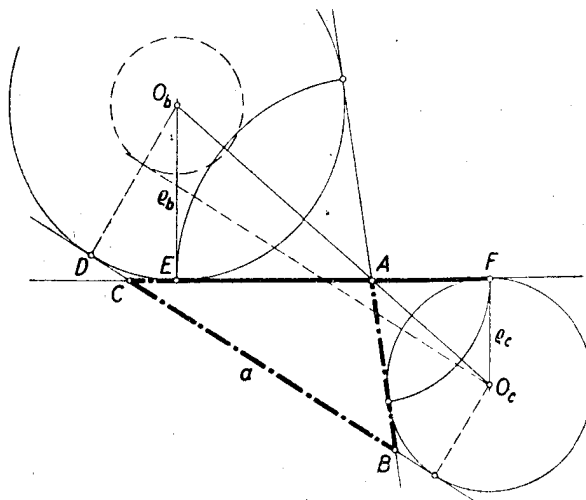
Jegyzet: Sokan választották a mutatók helyzetének meghatározására a következő utat (az elfordulásokat ismét a teljes kör 12-ed részével mérve): A 2 és 3 óra közti mutató állásánál a nagymutató 6 és 7 közt van. Ez azt jelenti, hogy a kicsi a 2-es számtól legalább $6/12$ és legfeljebb $7/12$ távolságra lehet. Ekkor 6 és 7 óra közt a nagymutató van a 12-estől számítva $2 + \frac{6}{12} = \frac{30}{12}$ és $2 + \frac{7}{12} = \frac{31}{12}$ -del jelzett határok közt, tehát a kicsi a 6 után legalább $\frac{30}{144}$ -del, de legfeljebb $\frac{31}{144}$ -del kell hogy legyen. Ekkor azonban a nagymutató is ezen határok közt van 6 és 7 közt, vagyis a 12-től mérve legalább $6 + \frac{30}{144} = \frac{894}{144}$ és legfeljebb $6 + \frac{31}{144} = \frac{895}{144}$ -nyire. Így a kismutatóról azt is tudjuk, hogy a 2-estől legalább $\frac{894}{12^3}$ -nyire és legfeljebb $\frac{895}{12^3}$ -nyire van. Hasonlóan szűkíthetők egyre jobban a mutatók helyzetére adható határok. Pl. $1/12^3 = 1/1728$ -ad beosztás (vagyis 5 perc ugyanennyied része) kevesebb mint 0,2 másodperc, tehát már a kapott értékek is jó közelítést adnak. Alkalmas ez a fokozatos közelítési eljárás a pontos érték meghatározására is, azonban ennek a keresztülvitele lényeges új fogalmak tisztázásán keresztül történhetne csak, ami nem állna arányban a feladat nehézségével.

Megjegyzés: Feltűnően sok versenyző idegenkedett a pontos eredményt szolgáltató közönséges törtektől és inkább közelítő értéket szolgáltató tizedestörtökkel számolt pontatlanul.

2. feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adna van az egyik oldala, a , és a másik két oldalhoz írt (kívülről érintő) körök ρ_b és ρ_c sugara.

I. megoldás: A feladatot megoldhatjuk számítás segítségével. Jelöljük az érintőkörök középpontját O_b és O_c -vel, érintési pontjukat a BC egyenesen T_b és T_c -vel (5. ábra).

Ennek alapján a következő szerkesztés nyerhető: $EF = a$ hosszúságú szakaszhoz rajzoljunk ellenkező oldalról E -ben érintő ρ_b sugarú és F -ben érintő ρ_c sugarú kört (9. ábra).



9. ábra

Szerkesszük meg a második belső közös érintőt és egy külső közös érintőt. Az érintők zárják közre a kívánt háromszöget. Jelöléseket az ábra szerint választva azt kell igazolnunk, hogy $BC = a$, ez pedig a fenti számoláshoz hasonlóan következik:

$$a = EF = CF - CE = s - CE = DB - DC = CB.$$

Megjegyzés: A helyes megoldók többsége csak bonyolult számításokkal oldotta meg a feladatot.

3. feladat: A sík 20 egyenesre, melyek között párhuzamosak nincsenek, legfeljebb hány részre osztja fel a síkot? Ezek között hány síkrész véges területű?

Megoldás: Azt fogjuk megállapítani, hogy egy újabb egyenes meghúzása mennyivel növelheti a síkrészek számát. Az első egyenes a síkot két részre osztja. Egy második egyenes, ha metszi az első, mindkét síkrészből egy-egy újabb síkrészt választ le, s így két egyenes 4 részre osztja a síkot. Egy harmadik egyenes, ha metszi az első kettőt különböző pontokban, akkor három síkrészt oszt újra ketté, s így 3-mal szaporítja a síkrészek számát. Egy negyedik egyenes annyi síkrészt oszt tovább, ahány részre ezt az egyenest az előzőkkel való metszéspontjai osztják. A negyedik egyenes tehát legfeljebb 4-gyel szaporíthatja a síkrészek számát, annyival akkor, ha mindegyik egyenest metszi, de nem megy át semelyik kettő metszéspontján.

Általában ha $n - 1$ egyenes van a síkban és meghúzzunk egy n -ediket ezt az előzőkkel való metszéspontok részekre osztják (véges szakaszokra és a két szélső metszésponttól végtelenbe nyúló két félegyenesre). Az egyenes minden egyes része egy-egy síkrészt kettéoszt. Az n -edik egyenesnek az előzőkkel maximálisan $n - 1$ metszéspontja lehet (ha nem megy át az előző egyenesek metszéspontjain), és ezek n -részre osztják az egyenest. Ha tehát 20 egyenest egymásután húzzunk meg, az első két részre osztja a síkot, a továbbiak sorra 2, 3, 4, ..., 20-szal szaporítják a síkrészek számát, ha nincs köztük párhuzamos és semelyik 3 egyenes nem megy át egy ponton. Így 20 egyenes

$$2 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20 = 2 + (2 + 20) + (3 + 19) + (4 + 18) + \dots + (10 + 12) + 11 = 2 + 9 \cdot 22 + 11 = 211$$

részre osztja a síkot.

Egymás után húzva az egyeneseket, végtelenbe nyúló síkrészek csak végtelenbe nyúló síkrészekből keletkezhetnek. Végtelenbe nyúló síkrész elvágása esetén csak akkor lesz mindkét rész végtelenbe nyúló, ha a részre osztó egyenesnek végtelenbe nyúló része osztja ketté, mert a feltétel szerint nem lehetnek az egyenesek között párhuzamosak. Így minden egyenes 2-vel szaporítja a végtelenbe nyúló síkrészek számát. Mivel ez első egyenes is 2 végtelenbe nyúló részre osztja a síkot, így kétszer annyi a végtelenbe nyúló síkrészek száma, mint az egyeneseké. Speciálisan a 20 egyenes szolgáltatja a síkrészek közül 40 lesz végtelenbe nyúló.

Jegyzet: 1. Ugyanúgy akárhány egyeneshez meghatározhatjuk, hogy mekkora a legtöbb síkrész száma, amelyre ennyi egyenessel fel lehet a síkot osztani. A síkrészek megszámlálásához azt kellett tudni, hogy a keletkező metszéspontok az egyenest hány részre osztják. Hasonló gondolatmenettel tovább is lehet menni annak meghatározására, hogy adott számú síkkal a teret hány részre lehet osztani.

2. A végtelenbe nyúló síkrészeket összeszámlálhatjuk a következőképpen is. Kerítsük körül az egyenesek összes metszéspontját pl. egy elég nagy körrel. Ez a kör a végtelenbe nyúló síkrészekeken halad keresztül, mindegyikbe egy íve esik; mivel párhuzamos egyenesek nincsenek, nem eshet két ív ugyanabba a síkrészbe, így annyi síkrész nyúlik a végtelenbe, ahány részre az egyenesek a kört osztják. n egyenes esetén ezek a kört $2n$ pontban metszik és ugyanennyi ívre is osztják, tehát n egyenes esetén: $2n$, speciálisan 20 egyenes esetén: 40 a végtelenbe nyúló síkrészek száma.

Megjegyzés: Számos versenyző a feladat szövegében szereplő »egyes» fogalmát összetévesztette a »szakasz» fogalmával. Természetesen megoldást nem találhatott.