

Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztály) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai:

**1. feladat.** Egy motorcsónak sebessége  $a$  km/óra, egy gőzhajóé  $b$  km/óra. Mindkét jármű az  $AB$  utat teszi meg, de a motorcsónak csak akkor indul, mikor a hajó már  $d$  km-t megtett. Az utóbbi mégis  $n$  órával később érkezik  $B$ -be, mint az előbbi. Mekkora az  $AB$  távolság?

**I. megoldás.** A motorcsónak az  $AB = x$  km távolságot

$$\frac{x}{a}$$

óra alatt teszi meg. A motorcsónak indulásától kezdve a hajó  $x - d$  km-t tesz meg  $B$ -ig; ezt  $b$  km/óra sebességgel haladva

$$\frac{x - d}{b}$$

óra alatt teszi meg. Ez  $n$  órával több, mint a motorcsónak menetideje, tehát

$$\frac{x - d}{b} = \frac{x}{a} + n.$$

Innen

$$(a - b)x = ad + abn,$$

tehát ha  $a \neq b$ , akkor

$$AB = x = \frac{a(bn + d)}{a - b} \text{ km.}$$

Az  $a, b, d, n$  adatok pozitív számok és a megoldásnak is csak akkor van értelme a feladat szempontjából, ha pozitív.

A feladatnak tehát csak akkor van megoldása ha  $a > b$  (ez nyilvánvaló is), és akkor mindig van egy megoldása.

**II. megoldás.** A feladatnak nyilvánvalóan csak akkor lehet megoldása, ha  $a > b$ . Ekkor a motorcsónak óránként  $a - b$  km-t hoz be a gőzhajó előnyéből. A motorcsónak az  $AB$  úton utoléri a hajót, sőt még akkora előnyt is szerez, amennyit a hajó  $n$  óra alatt tud megtenni, vagyis  $bn$  km előnyt. A  $d$  km hátrány behozásához és a  $bn$  km előny megszerzéséhez

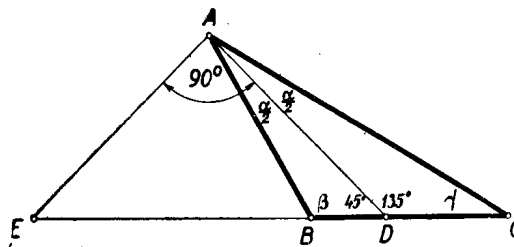
$$\frac{d + bn}{a - b} \text{ óra}$$

időre van szüksége a motorcsónaknak. Ennyi idő alatt teszi tehát meg az  $\overline{AB}$  utat, s így a megtett út hossza

$$AB = a \frac{bn + d}{a - b} \text{ km}$$

**2. feladat.** Az  $ABC_{\triangle}$  A csúcsából kiinduló belső szögfelező messe a  $BC = a$  oldalt egy  $D$  pontban, a külső szögfelező pedig ugyanennek az oldalnak meghosszabbítását egy  $E$  pontban. Milyen összefüggés van az  $ABC$  háromszög szögei között, ha  $AD = AE$ ?

**Megoldás:** A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Mivel a feltétel szerint az  $ADE_{\triangle}$  egyenlő szárú, a belső és külső szögfelező pedig egymással merőleges azért

$$\angle ADB = 45^{\circ},$$

és így

$$\angle ADC = 135^{\circ}.$$

Az  $ADC$ , ill  $ADB$  háromszögekre a külső és belső szögek közötti összefüggést felhasználva

$$(1) \quad \gamma + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ,$$

$$(2) \quad \gamma + \frac{\beta}{2} = 135^\circ.$$

(1) és (2)-ből következik, hogy

$$\beta = 135^\circ - \frac{\alpha}{2} = 135^\circ - (45^\circ - \gamma) = 90^\circ + \gamma,$$

és így

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (90^\circ + 2\gamma) = 90^\circ - 2\gamma.$$

Tehát a háromszög szögeire fennáll,

$$(3) \quad \gamma < 45^\circ, \quad \beta = 90^\circ + \gamma, \quad \alpha = 90^\circ - 2\gamma.$$

Fordítva, ha a (3) alatti összefüggések teljesülnek, akkor  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  mind pozitívok, és összegük  $180^\circ$ , és így szerkeszthető (pl. kiindulva egy tetszőleges  $45^\circ$ -nál kisebb  $\gamma$  szögből) olyan háromszög, amelynek ezek a szögei. Ebben a háromszögben teljesülnek az (1) a (2) alatti egyenlőségek, vagyis az  $ABC_\Delta$   $\alpha$  szögének  $AD$  felezője a  $DB$  iránnyal

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma = 45^\circ$$

nagyságú szöget zár be. Ha  $AE$  az  $\alpha$  szög külső szögének a felezője akkor  $EAD \sphericalangle = 90^\circ$ , és így  $AED \sphericalangle = 45^\circ$ , vagyis  $ADE_\Delta$  egyenlő szárú azaz

$$AD = AE.$$

Tehát a (3) alatti összefüggések teljesen jellemzik a feladat követelményeinek megfelelő háromszögeket.

**3. feladat.** *Két szám negyedik hatványának különbsége mikor osztható 5-tel?*

**I. megoldás:** Öttel való oszthatóság eldöntésére elegendő egy szám utolsó jegyét nézni. Hatvány utolsó jegye viszont csak az alap utolsó jegyétől függ, így egyszerű számítással adódik, hogy a negyedik hatvány utolsó jegye, ha az alap utolsó jegye

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

sorra

$$0, 1, 6, 1, 6, 5, 6, 1, 6, 1$$

lesz. Két negyedik hatvány különbsége tehát 0-ra vagy 5-re végződik, s így osztható 5-tel, kivéve azt az esetet, ha az egyik hatványozott szám osztható öttel, a másik pedig nem.

**II. megoldás.** Annak eldöntésére, hogy egy különbség osztható-e 5-tel, elég ezt a maradékot nézni, amely adódik, ha a kisebbítendőt, ill. kivonandót 5-tel osztjuk.

Szükségünk lesz ennek megvizsgálásához arra az észrevételre, hogy egy szám négyzete 5-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint az 5-tel való osztásból származó maradékának a négyzete. Valóban, ha

$$a = 5k + r,$$

akkor

$$a^2 = 25k^2 + 10kr + r^2 = 5(5k^2 + 2kr) + r^2,$$

s így  $a^2$ -nek 5-tel osztva ugyanannyi a maradéka, mint  $r^2$ -nek.

Legyen most már  $a$  és  $b$  két egész szám.

Ekkor

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Ha a két szám ugyanannyi maradékot ad 5-tel osztva, akkor az első tényező osztható 5-tel. (Beleértjük azt az esetet is, ha mind a két szám osztható 5-tel, azaz ha mindkét maradék 0.) Ha a két szám maradéka 1 és 4, vagy 2 és 3, akkora második tényező osztható 5-tel.

Maradnak még azok az esetek, amelyekben a két szám maradéka 1 és 2, 1 és 3, 4 és 2, 4 és 3, mert ha az egyik szám 0 maradékot ad, a másik pedig 0-tól különböző maradékot 5-tel osztva, akkor a negyedik hatványok különbsége nyitván nem osztható 5-tel. Az 1 és 4 maradékot adó számok négyzete 1-et, a 2 és 3 maradékot adó számok négyzete pedig, 5-tel osztva, 4-et, ad maradékul, s így a hátralevő négy esetben a fenti szorzat harmadik tényezője osztható 5-tel.

Azt nyertük tehát, hogy két szám negyedik hatványának különbsége csak akkor nem osztható 5-tel, ha az egyik szám osztható 5-tel a másik nem,

Jegyzet: Válasszuk  $b$ -t 1-nek, ekkor eredményünk azt adja, hogy

$$a^4 - 1$$

mindig osztható 5-tel, ha  $a$  nem osztható 5-tel. Ez speciális esete Fermat következő nevezetes tételének:<sup>\*1</sup>

*Ha  $p$  prímszám, a pedig bármilyen  $p$ -vel nem osztható szám, akkor*

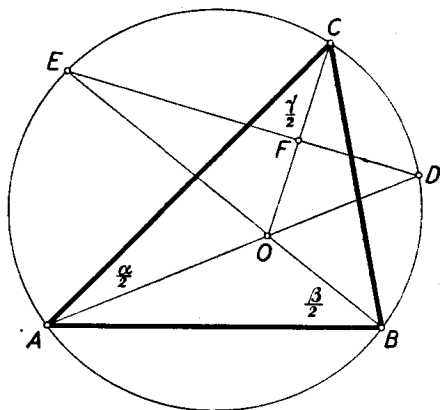
$$a^{p-1} - 1$$

osztható  $p$ -vel.

A II. forduló feladatai:

**1. feladat.** Egy háromszög  $\alpha$  és  $\beta$  szögének szögfelezője messe a háromszög köré írható kört a  $D$  és  $E$  pontban. Mekkora szögeket zár be a  $DE$  szakasz a háromszög  $\gamma$  szögének szögfelezőjével?

**I. megoldás.** Legyen a  $C$ -ből induló szögfelező és  $DE$  metszéspontja  $F$ , a szögfelezők metszéspontja  $O$ . (2. ábra.  
– Felhasználjuk tehát azt a tételt, amely szerint a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást.)



2. ábra

Ekkor, mint az  $AOC_{\Delta}$  külső szöge

$$\angle COD \equiv \angle FOD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tétele szerint

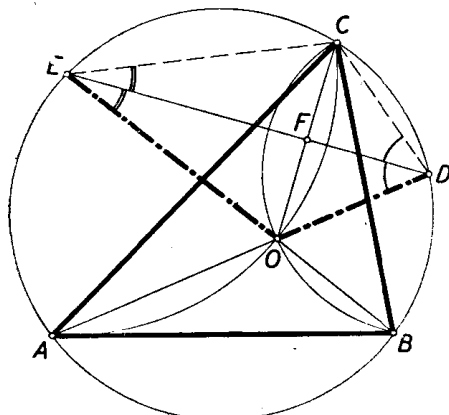
$$\angle ADE \equiv \angle ODF = \frac{\beta}{2}.$$

Így a  $DFO$  háromszögből

$$\angle DFO = 180^\circ - (\angle ODF + \angle FOD) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ.$$

$DE$  tehát merőleges a  $C$ -ből induló szögfelezőre.

**II. megoldás:** A  $D$  ill.  $E$  pont felezi a körülírt körnek a  $BC$ , ill.  $AC$  oldalak fölötti ívét. Így az egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlő volta miatt a  $CDOE$  négyszögben a  $DE$  átló felezi a végpontjainál levő szögeket (3. ábra), tehát szimmetria-tengelye a négyszögnek. (A négyszög deltoid.)



3. ábra

<sup>1</sup>Lásd pl. Faragú László: » A számelmélet elemei« c. szakköri füzet 75. old.

Mivel  $C$  és  $O$  egymás tükörképei  $DE$ -re nézve, azért

$$DE \perp CO,$$

de  $CO$  a  $C$ -ből induló szögfelező, mert  $O$ -n kell átmennie a harmadik szögfelezőnek is.

**III. megoldás:** A  $CDOE$  négyszög deltoid voltát a következőképpen is bizonyíthatjuk:

Ha a  $B$  és  $C$  pontokat rögzítjük és  $A$  végigfut a  $\widehat{BEC}$  íven, akkor  $O$  annak a körnek  $BC$  ívén fut végig, amelynek középpontja  $D$  (3. ábra – lásd a tavalyi A. D. verseny I. fordulójának 1. feladatát a K. M. L. 1954. októberi számában). Hasonlóképpen  $A$  és  $C$  rögzítése és a  $B$  pont mozgása esetén  $O$  mértani helye az  $E$  középpontú  $AC$  körív. Tehát

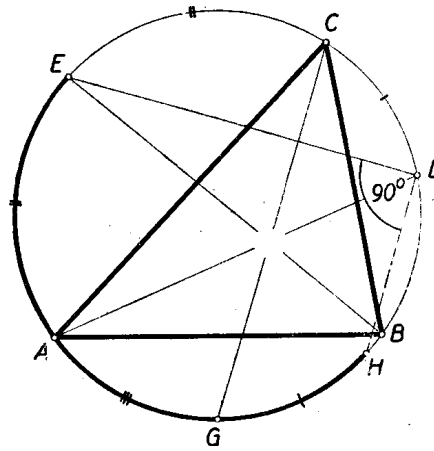
$$DC = DO \quad \text{és} \quad EC = EO,$$

ami bizonyítandó volt.

\*

A további megoldások nem használják fel a szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételt.

**IV. megoldás.** Jelölje  $G$  a  $C$ -ből húzott szögfelező metszéspontját a körrel (4. ábra).



4. ábra

$D$ ,  $E$  és  $G$  felezik a háromszög oldalai feletti köríveket. Húzzunk  $D$ -ből párhuzamost  $CG$ -vel. Legyen ennek második metszéspontja a körrel  $H$ . Ekkor

$$\widehat{CH} = \widehat{CD},$$

így az  $\widehat{EAGH}$  körív a három oldal fölötti körívnek felerészeiből tevődik össze, vagyis félkör.

Ebből következik, hogy

$$\angle EDH = 90^\circ,$$

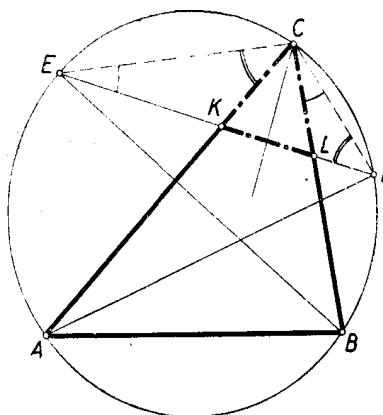
és így a  $DH \parallel CG$  összefüggés folytán

$$DE \perp CG.$$

*Megjegyzés:* Tulajdonképpen azt az általános tételt bizonyítottuk az itt szereplő speciális esetre, hogy két húr szöge akkora, mint a szög és csúcsszögével szemközti ívek összege fölötti kerület szöge a körben. Az itt használt bizonyítás tetszés szerinti húrokra átvihető.

A feladat néhány további megoldása lényegében e tétel más segédvonalak alapján történő bizonyításaiban állt. (Ezeket itt nem közöljük.)

**V. megoldás:** Messe a  $DE$  egyenes az  $AC$  és  $BC$  oldalt  $K$ -ban és  $L$ -ben. Több versenyző azt mutatta ki, hogy a  $CKL$  háromszög egyenlő szárú. Ebből következik, hogy  $DE$  merőleges a  $C$ -ből induló szögfelezőre, mert egyenlőszárú háromszögben az alap és a csúcsnál levő szög szögfelezője merőlegesek egymásra.



5. ábra

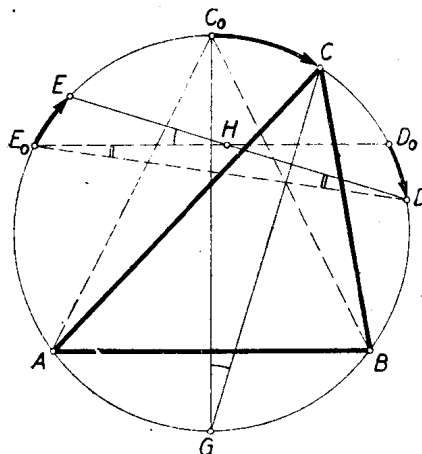
Az egyenlőszárúság például így látható be egyszerűen: Mivel  $E$  felezi az  $AC$  körívet,  $D$  a  $BC$  körívet (5. ábra), azért

$$\angle CED = \angle BCD \quad \text{és} \quad \angle ACE = \angle CDE,$$

mint egyenlő köríveken nyugvó kerületi szögek. Ebből következik, hogy a  $\triangle CKE$  és  $\triangle DLC$  harmadik szögei is egyenlők, amelyek egyben a  $\triangle CKL$  háromszög  $K$ -nál és  $L$ -nél levő külső szögei.

Így a  $\triangle CKL$  háromszög egyenlő szárú.

**VI. megoldás:** Legyen  $C_0$  az  $AB$  fölötti  $C$ -t tartalmazó körív felezőpontja. Az  $\triangle ABC_0$  egyenlőszárú háromszög  $C_0$ -ból induló szögfelezője az ábrának szimmetriatengelye s így az  $\triangle ABC_0$  másik két szögfelezőjének,  $D_0$  és  $E_0$  metszéspontjait összekötő egyenes merőleges rá (6. ábra).



6. ábra

Ha most  $C_0$  elmozdul a kör mentén  $C$ -be, akkor  $D_0$  és  $E_0$  ugyanolyan irányban feleakkora körívvel mozognak el. Legyen  $D_0$ ,  $E_0$  és  $DE$  metszéspontja  $H$ . A mondottak szerint

$$\angle D_0 E_0 D = \angle E D E_0 = \frac{1}{2} \angle C_0 G C.$$

Ennek folytán, mint az  $\triangle E_0 D H$  háromszög külső szöge

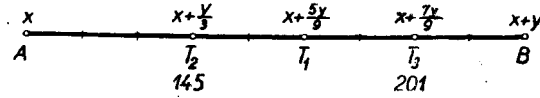
$$\angle E_0 H E = \angle H E_0 D + \angle H D E_0 = \angle C_0 G C,$$

vagyis a  $DE$  egyenes ugyanakkora szöggel fordult el, mint a  $C$  csúcsból induló szögfelező, merőlegességük tehát megmaradt.

**2. feladat.** Egy műút két pontjából,  $A$  és  $B$ -ből egyszerre indul egy-egy gépkocsi egymással szembe. Sebességük állandó, aránya  $5 : 4$  (az  $A$ -ból induló a gyorsabb). A két gépkocsi  $A$  és  $B$  között ide-oda cirkál. Másodszor a 145-ös km-kőnél, harmadszor a 201-es km-kőnél találkoznak. Hányas km-kőnél fekszik  $A$  és  $B$ ?

**I. megoldás:** Nevezzük a két gépkocsit röviden  $a$ -nak és  $b$ -nek. Feküdjön  $A$  az  $x$  km-kőnél és  $B$  az  $(x+y)$  km-kőnél. Jelöljük az első, második és harmadik találkozási pontot rendre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ -mal.

Az első találkozásig a két gépkocsi együttvéve  $y$  km utat tesz meg. A feladat szerint  $AT_1 : T_1 B = 5 : 4$ , amiből



7. ábra

$$AT_1 = \frac{5y}{9} \text{ (7. ábra).}$$

A második találkozásig együttesen  $3y$  km utat tesznek meg, tehát  $a$  megtesz  $3 \cdot \frac{5y}{9} = \frac{15y}{9} = y + \frac{6y}{9} = y + \frac{2y}{3}$  km-t, és így  $T_1$  az  $x + y - \frac{2y}{3} = x + \frac{y}{3}$  km-kőnél fekszik.

A harmadik találkozásig a két gépkocsi együttvéve  $5y$  utat tesz meg, amiből  $a$ -ra esik  $5 \cdot \frac{5y}{9} = \frac{25y}{9} = 2y + \frac{7y}{9}$ , tehát  $T_2$ -nél az  $x + \frac{7y}{9}$  km-kő van. A feladat szerint

$$(1) \quad x + \frac{y}{3} = 145,$$

$$(2) \quad x + \frac{7y}{9} = 201,$$

amiből

$$y = 126 \quad \text{és} \quad x = 103.$$

Tehát  $A$  a 103-as,  $B$  a  $103 + 126 = 229$ -es km-kőnél fekszik.

Célszerű az  $x$  ismeretlent egyelőre teljesen figyelmen kívül hagyni, amikor is  $y$ -ra olyan egyszerű egyenletet – tudniillik (2) és (1) különbségét – nyerünk, amely már következtetéssel pótolható, amint azt az alábbi megoldás mutatja.

**II. megoldás:** Az  $a$  és  $b$  jelöléseket megtartva az első találkozásig  $a$  az  $AB$  útszakasz  $\frac{5}{9}$ -ét,  $b$  a  $\frac{4}{9}$ -ét teszi meg. Minden további Két találkozás közt a két gépkocsi együtt az  $AB$  szakasz kétszeresét teszi meg, tehát  $a$  az útszakasz  $\frac{10}{9}$ -ét,  $b$  a  $\frac{8}{9}$ -ét. Így a második találkozás az útszakasz  $A$ -tól számított  $\frac{1}{3}$ -án történik, a harmadik pedig az  $A$ -tól számított  $\frac{7}{9}$ -én. A két találkozás helyének  $56$  km-es távolsága tehát az  $AB$  szakasz  $\frac{4}{9}$  része. A harmadik találkozástól  $\frac{2}{9}$  útszakasznyira tehát a  $229$ -es kilométerkőnél van  $B$ ,  $A$  pedig az útszakasz  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ -ével azaz  $42$  km-rel a második találkozás helye előtt, tehát a  $103$ -as kilométerkőnél.

**3. feladat.** Igazoljuk, hogy ha  $n$  természetes szám, akkor  $2^n - 1$ ,  $2^n + 1$ ,  $2^{2n} + 1$  számok egyike osztható  $5$ -tel.

**I. megoldás:** Figyeijük meg, hogy páros számot  $6$ -tal szorozva az utolsó számjegy változatlan marad, két egész szám szorzatának utolsó jegyét pedig a tényezők utolsó számjegyei szorzatának az utolsó jegye adja. Így mivel  $2^4$  utolsó jegye  $6$ , tehát  $2^5, 2^9$ , általában tetszés szerinti pozitív egész  $k$ -ra  $2^{4k+1}$  ugyanarra a jegyre végződik mint az első hatvány, vagyis  $2$ -re, hasonlóan  $2^{4p+2}$  utolsó jegye  $4$ ,  $2^{4k+3}$ -é  $8$ , végül  $2^{4k}$ -é  $6$ .

Így  $2^n + 1$  akkor és csakis akkor végződik  $5$ -re, ha az  $n$  kitevő  $4k + 2$  alakú,  $2^n - 1$  akkor és csakis akkor, ha  $4k$  alakú a kitevő  $2n$  aszerint  $4k + 2$  alakú, vagy  $4k$  alakú, amint  $n$  páratlan, vagy páros. Így  $2^{2n} + 1$  az első esetben  $5$ -re, a másodikban  $7$ -re végződik. Azt kaptuk tehát, hogy ha a természetes szám, akkor a

$$2^n - 1, \quad 2^n + 1, \quad \text{és} \quad 2^{2n} + 1$$

számok közül az egyik és csakis az egyik osztható mindig  $5$ -tel.

**II. megoldás.**  $2^n - 1$  és  $2^n + 1$  szomszédos páratlan számok, tehát utolsó jegyeik  $1$  és  $3$  vagy  $3$  és  $5$ , vagy  $5$  és  $7$ , vagy  $7$  és  $9$  vagy  $9$  és  $1$  lehet. A második és harmadik esetben a feladat állításának helyessége nyilvánvaló. Az ötödik nem fordulhat elő, mert ekkor

$$(2^n - 1) + (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$10$ -zel, tehát  $5$ -tel is osztható volna, ami lehetetlen. A fennmaradó első és negyedik esetben az utolsó jegyek szorzata egyformán  $3$ -ra végződik, tehát  $(2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{2n} - 1$  utolsó jegye  $3$ , s így  $(2^{2n} + 1)$ -é  $5$ , tehát ez osztható  $5$ -tel.

**III. megoldás:** Elég megmutatni, hogy a feladatban szereplő három szám szorzata osztható  $5$ -tel, mert  $5$  prímszám, és prímszámoknak megvan az a tulajdonságuk, hogy egész számok egy szorzatának csak úgy lehetnek az osztói, ha osztói valamelyik tényezőnek.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> A prímszámoknak ez a nevezetes tulajdonsága semmiképpen sem tekinthető magától értetődőnek. Bizonyításra lásd pl. az előző lábjegyzetben idézett műben a 22. old.

A négy szám szorzata:

$$(2^n - 1)(2^n + 1)(2^{2n} + 1) = (2^{2n} - 1)(2^{2n} + 1) = 2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1$$

mindig osztható  $2^4 - 1 = 15$ -tel, tehát 5-tel is.

Az eredmény mutatja, hogy a három szám valamelyike mindig osztható 3-mal is.

*Jegyzet.* Ez a megoldás világosan mutatja a feladat kapcsolatát az I. forduló 3. feladatával kapcsolatban említett Fermat-féle tétellel.

**IV. megoldás:** Mivel

$$2^{2n} + 1 = 2^{2n} - 4 + 5 = (2^n - 2)(2^n + 2) + 5,$$

így ez a szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha jobboldalon szereplő szorzat osztható 5-tel.

De

$$2^n - 2, 2^n - 1, 2^n, 2^n + 1, 2^n + 2$$

öt egymástitáni egész szám. Tehát közülük egy és csakis egy osztható 5-tel. A középső szám nem osztható 5-tel, tehát a másik négy közt kell 5-tel oszthatónak lennie. Ebből már következik a feladat állításának helyessége.