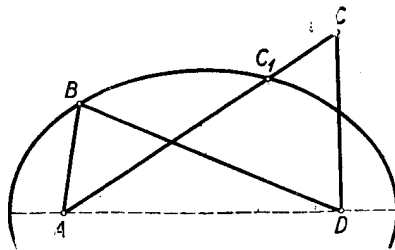


Első feladat. Az ABCD konvex négyszögben $AB+BD$ nem nagyobb, mint $AC+CD$. Bizonyítandó, hogy akkor az AB oldal kisebb az AC átlónál.

Megjegyzések: 1. Mivel a feladat négyszögről szól, az A, B, C, D pontoknak egymástól különbözőeknek kell lenniök. Ezért téved, aki szerint a feladatnak azt kellene állítania, hogy az AB oldal nem nagyobb az AC átlónál, hiszen $AB = AC$, ha B és C egybeesik (?).

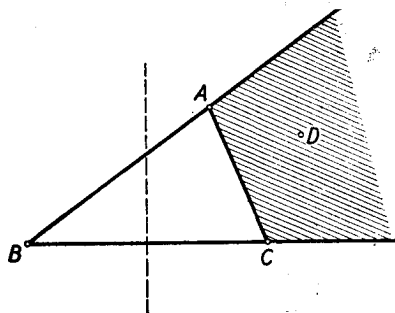
2. A következő okoskodás alátámasztja azt, hogy a feladat állítása helyes. Rajzoljunk ellipszist, amelynek fókuszai A és D , és amelyik áthalad a B ponton (1. ábra).



1. ábra

A feladat feltevéséből következik, hogy C ezen az ellipszisen kívül van, vagy esetleg rajta. Ezért az AC szakasznak egy C_1 pontja az ellipszisen van, C_1 esetleg azonos a C ponttal. Minthogy »az ellipszisnek A -ból induló rádiuszvektora állandóan növekszik, amint végpontja az ellipszisen a nagytengely A -hoz közelebb eső végpontjától a D -hez közelebb eső végpont felé mozog«, következik az, hogy AB kisebb AC_1 -nél, s így még inkább kisebb AC -nél. – Ezt az okoskodást bizonyításnak nem nevezhetjük, hiszen az idézőjelek közé foglalt állítást a szemlélet alapján elhiszük ugyan, de bizonyítva nem látjuk. – Bizonyítássá válik ez az okoskodás, ha ezt az állítást nemcsak kimondjuk, hanem bizonyítjuk is. Ennek kifogástalan elvégzése azonban elég körülményes feladat (hacsak nem éppen feladatunknak más megoldása alapján következtetünk ennek az állításnak helyességére). – Az említett bizonyítás kevés munkával elvégezhető, ha a trigonometriát használjuk, és arra az előismeretre építünk, hogy pl. a cosinus-függvény 0° és 180° között állandóan fogy. Az ilyen bizonyítás eleminek és ötletesnek semmiképpen sem volna nevezhető.

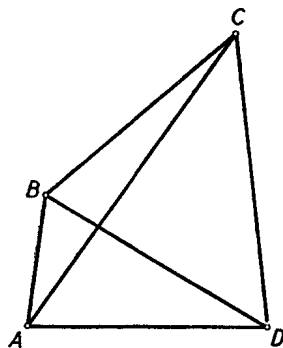
I. megoldás. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $AB \geq AC$, hogy tehát az A pont a BC szakasz felezőmerőlegesén, vagy pedig ennek C felőli oldalán helyezkedik el (2. ábra).



2. ábra

Mivel az $ABCD$ négyszög konvex, következik, hogy a D pont az AB oldalegyenesnek C felőli oldalán, a BC oldalegyenesnek A felőli oldalán, végül az AC átlóegyesnek B -vel átellenes oldalán van. A D pont tehát annak (az ábrán vonalkázott) tartománynak belsejében van, amelyet megkapunk, ha az $ABC \triangleleft$ tartományából az ABC háromszöget levágjuk. Ennek a tartománynak a belseje azonban egészben a BC szakasz felezőmerőlegesének C felőli oldalán van, hiszen határvonalainak pontjai közül legfeljebb csak A lehet a felezőmerőlegesen. Ezért a D pont is ebben a félsíkban van, és $BD > CD$. Ezt az egyenlőtlenséget az igaznak elfogadott egyenlőtlenséggel összegezve $AB + BD > AC + CD$ adódik, ami ellentmond a feladat kirovásának. Ez az ellentmondás feltevésünk lehetetlenségét és a feladat állításának helyességét bizonyítja.

II. megoldás. Ha $BD > CD$, akkor ebből és $AB + BD \leq AC + CD$ fennállásából (kivonással) következik, hogy $AB < AC$. Ezért a bizonyításnál jogosan szorítkozhatunk arra az esetre, amidőn $BD \leq CD$ (3. ábra).



3. ábra

Ebben az esetben – hivatkozva arra a tételre, hogy a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van – a $BCD\triangle$ -ből adódik, hogy $BCD\angle \leq DBC\angle$. Így tehát $BCA\angle < ABC\angle$, hiszen az előző egyenlőtlenség baloldalán szereplő szöveget csökkentettük, a jobboldalon állót meg növeltük. Az utóbbi egyenlőtlenségből azonban – a már idézett tételt az $ABC\triangle$ -re alkalmazva – adódik, hogy $AB < AC$.

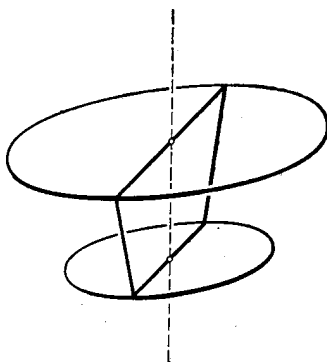
III. megoldás. Ismeretes (és a háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségből nyomban következik), hogy egy konvex négyszög két átellenes oldalának összege az átlók összegénél kisebb, esetünkben tehát $AB + CD < AC + BD$. A feladat feltevése szerint $AB + BD \leq AC + CD$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve, rendezés után $2 \cdot AB < 2 \cdot AC$ adódik, ami állításunkat bizonyítja.

Második feladat. *Bizonyítandó, hogy ha egy test minden síkmetszete kör, akkor a test gömb.*

Megjegyzések: 1. Legrövidebben a következő módon indokolhatjuk az állítás helyességét: Tekintsük a testnek egy leghosszabb húrját. E húron átfektetett sík körben metsz, s a húr ennek a körnek átmérője, hiszen különben ennek a körnek, tehát magának a testnek is volna a kiszemelnél hosszabb húrja. Ebből azonban az következik, hogy a test azonos avval a gömbbel, melynek egyik átmérője a kiszemelt húr. – Ez az okoskodás hiányos, mert nem bizonyítja, hogy *van* leghosszabb húr. Okoskodásunk bizonyítássá válnék, ha ezt is bizonyítanók, ehhez azonban a felsőbb matematika eszközeinek használatára volna szükség.

2. A feladat szövegezése félreértésre nem ad lehetőséget. Felvethető mégis a kérdés, mit jelent a »test« szó a szövegben. Felelhetjük, hogy térbeli pontoknak tetszőleges összességét, halmazát jelentheti. Feladatunknak ilyen irányban is szabatos megszövegezése így hangzik: Legyen egy térbeli ponthalmalmaznak egynél több pontja; rendelkezze e ponthalmalmaz avval a tulajdonsággal, hogy ha egy síkban egynél több pontja van, akkor e síkban levő pontjai egy körlemez (egy kör belső és határpontjai által alkotott halmazt) alkotnak; bizonyítandó, hogy e térbeli ponthalmalmaz gömb (egy gömb belső és határpontjainak halmaza). A következő megoldások akkor is hiánytalanok, ha azokat e szabatosabb feladatszövegezés szemüvegén át tekintjük.

I. megoldás. Tekintsük testünknek két párhuzamos síkmetszetét. Ezeknek középpontjain át síkjaikra merőleges síkot fektetünk. E sík a két kört négy pontban metszi (4. ábra).

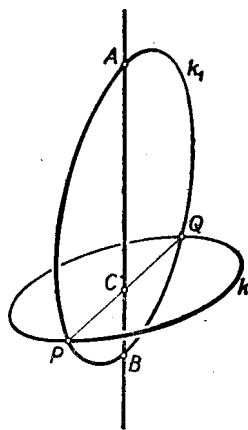


4. ábra

E négy pont által meghatározott trapéz húrnégyszög, hiszen síkja a testet körben metszi; ezért e trapéz szimmetrikus (szemközti szögei kiegészítő szögek, ezért egy párhuzamos oldalon egyenlő szögek nyugszanak). Szimmetrikus trapéznál a párhuzamos oldalak felezőpontjait összekötő egyenes merőleges a párhuzamos oldalakra, így tehát a körközéppontokat összekötő egyenes merőleges a körök síkjaira.

Ezek szerint, ha a két sík egyikét párhuzamosan eltoljuk, az adódó körmetszet középpontja mindig rajt van a másik kör középpontjában síkjára emelt merőlegesen. Ez az egyenes tehát forgástengelye testünknek, testünk forgástest. A forgástengelyen átfektetett sík is körben metszi azonban a testet, és a szimmetria miatt e kör középpontja a forgástengelyen van. A szereplő forgástest tehát gömb.

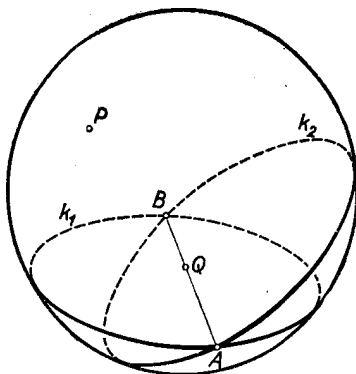
II. megoldás. Tekintsük a testnek egy C középpontú k körmetszetét (5. ábra).



5. ábra

Ennek síkjára C pontban merőlegest állítunk. Fekesszünk át egy síkot e merőlegesen. Ez a sík a k kört P és Q pontban, a testet pedig egy k_1 körben metszi. Mivel PQ húrja ennek a körnek, e húr felezőmerőlegese, tehát az eredetileg szerkesztett merőleges k_1 -nek egy AB átmérőjét tartalmazza. Mivel a metsző síkot önkényesen vettük fel, kimondhatjuk, hogy az AB egyenesen átfektetett minden sík AB átmérőjű körben metszi a testet. Testünk ezért az AB átmérőjű gömbbel azonos.

III. megoldás. Ha testünknek egy AB húráján át két síkot fektetünk (6. ábra), két körmetszethez, az egymást A , B pontokban metsző k_1 és k_2 körökhöz jutunk.



6. ábra

E két kör egy G gömböt határoz meg (középpontja a két körközéppontban a körsíkokra emelt merőlegesek metszéspontja, s ezeknek van metszéspontjuk, mert AB felezőmerőleges síkjában vannak, és nem párhuzamosak).

Legyen P testünk felületén egy pont. Fekesszünk egy síkot a P ponton és az AB húrnak egy belső Q pontján át. Ez a sík a k_1 és k_2 kört négy pontban metszi, hiszen áthalad mindkét körnek belső pontján, a Q ponton. Ez a négy pont a G gömb felületén egy kört határoz meg. A felvett sík körmetszete is áthalad e négy ponton, ez a két kör tehát azonos. Ezek szerint P is G felületén van, és minden, a Q ponton áthaladó sík által G -ből kimetszett kör testünknek felületén helyezkedik el. Testünk ezért a G gömbbel azonos.

IV. megoldás. Legyen k_1 a testnek egy körmetszete (6. ábra), legyen Q ennek a körlemeznek belső pontja, legyen P a test felületén, de nem a k_1 körön, legyen végül G az a gömb, amelyik áthalad a P ponton és tartalmazza a k_1 kört. A PQ egyenesen átfektetett sík a k_1 kört A és B pontban metszi (hiszen tartalmazza a körnek belső Q pontját), továbbá testünket és a G gömböt is körben metszi. E két kör azonos, mert P , A és B közös pontjaik. E síkmetszete az azonosságából a test és a G gömb azonossága következik.

Harmadik feladat. Egy körmérkőzés során mindenki mindenkivel egyszer mérkőzött, és egyetlen mérkőzésnek sem volt döntetlen az eredménye. Bizonyítandó, hogy van olyan résztvevő, aki minden versenytársát megemlíti akkor, ha felsorolja az általa legyőzötteket, valamint azokat, akiket az általa legyőzöttek legyőztek.

I. megoldás. Legyen A olyan résztvevő, akinél több győzelmet senki sem aratott. Ha A nem felelne meg a feladat követelményének, akkor volna olyan B versenyző, akit sem A , sem az A által legyőzöttek nem győztek le, aki tehát mindezeket megverte, s így legalább eggyel több győzelmet aratott, mint A . Ez azonban lehetetlenség, mert A -nál több győzelmet senki sem aratott, ezért A megfelel a feladat követelményének.

II. megoldás. Legyen A_1 a versenyzők egyike. Ha az A_1 által a feladat előírása szerint végzett felsorolásban nem szerepel minden más versenyző, akkor jelöljük az általa nem említett versenyzők összességét H_1 -gyel. Minthogy A_1

ezeket nem említette, mindegyikük megverte A_1 -et és az A_1 által legyőzötteket. Ezért a H_1 csoport minden tagja megemlíti az A_1 által említetteket, ha az előírt felsorolást elvégzi. Legyen A_2 egy tagja a H_1 csoportnak. Ha A_2 felsorolásában nem szerepel minden más versenyző, akkor tehát a nem említettek mind H_1 -be tartoznak, s ezek összességét H_2 -vel jelöljük. Mivel A_2 ezeket nem említette, mindegyikük megverte A_2 -t és az A_2 által legyőzötteket, ezért a H_2 csoport minden tagja megemlíti felsorolásában az A_2 által említetteket. Így tovább haladva egyre kevesebb versenyzőből álló $H_1, H_2, \dots$ csoportokhoz jutunk, amíg el nem érünk olyan A_n versenyzőhöz, akinek felsorolásában minden versenytársa szerepel. Minthogy a csökkenő csoportok sorozata nem lehet végtelen, el kell hogy jussunk ilyen versenyzőhöz.

Megjegyzés: A közölt megoldás burkoltan teljes indukcióra épül. Okoskodását a következőképpen is előadhatjuk: Ha csak két résztvevő van, a feladat állítása helyes; tegyük fel, hogy az állítás helyes, ha a résztvevők száma n -nél kevesebb; az n versenyző közül kiválasztott A_1 versenyző egy H_1 csoportot határoz meg, hacsak maga meg nem felel a követelménynek; H_1 -ben n -nél kevesebb résztvevő van, az indukciós feltevés szerint van tehát közöttük olyan, akinek felsorolásában H_1 -nek minden más tagja szerepel, a fentebbiek szerint viszont a H_1 -be nem tartozók mindegyikét is említi, ez a versenyző tehát megfelel a feladat követelményének.

III. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha csak két résztvevő van, az állítás nyilván helyes. Tegyük fel, hogy helyes az állítás, ha n résztvevő van. Ha tehát $n + 1$ résztvevő van, akkor van az első n között olyan A résztvevő, akinek felsorolásában minden más versenyző szerepel az első n közül. Legyen B az $(n + 1)$ -edik résztvevő. Ha B is szerepel A felsorolásában, akkor A megfelel a követelménynek. Ha B nem szerepel A felsorolásában, akkor B le kellett hogy győzze A -t és azokat, akiket A legyőzött; ezért B -nek felsorolásában szerepel A és mindazok, akiket A felsorolt; ekkor tehát B megfelel a követelménynek.

IV. megoldás. A versenyzők egy teremben helyezkednek el. Az egyik versenyző kivezeti a teremből azokat, akiket legyőzött (esetleg senkit sem). Ha van még, aki a teremben marad, egyikük újból kivezeti azokat, akiket legyőzött a teremben maradtak közül. Ezt folytatják mindaddig, amíg valaki a termet ki nem üríti. A kiürítő legyőzte azokat, akiket kivezet, és azokat, akik korábban kivezettek, hiszen a teremben maradhatott, ez utóbbiak viszont legyőzték az általuk kivezetetteket. A kiürítő tehát minden társát megemlíti felsorolásában.

Megjegyzések: 1. Az első megoldás mutatja, hogy a győztes (vagy a győztesek bármelyike) megfelel a követelménynek. Nem igaz azonban, hogy csak győztes felelhet meg. Sőt még a vesztes is megfelelhet, ezt az alábbi eredménytáblázat példája bizonyítja:

	A	B	C	D	E
A	–	1	1	1	0
B	0	–	1	0	1
C	0	0	–	1	1
D	0	1	0	–	1
E	1	0	0	0	–

2. Az is lehetséges, hogy a verseny minden résztvevője megfelel a feladat követelményének. A fenti eredménytáblázat erre is példát nyújt. Mutatja, hogy 5 versenyző esetében ez is lehetséges. Felvetjük a kérdést, hogy hány résztvevős versenyben lehetséges ez.

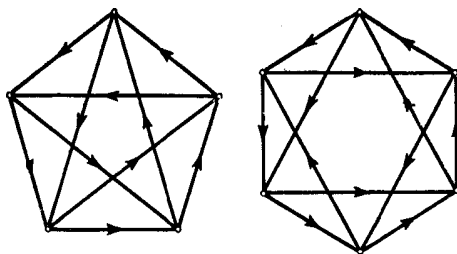
Ha két résztvevő van, nyilvánvaló, hogy csak egyikük (a győztes) felel meg a követelménynek. Négy résztvevős versenyben sem felelhetnek meg mind a négyen a feladat követelményének. Ha ugyanis van közöttük olyan résztvevő, aki három győzelmet aratott, akkor a többinek felsorolásában ez a versenyző nem szerepel. Ha van olyan résztvevő, akit mindenki legyőzött, akkor ennek felsorolásában senki sem szerepel. Ha viszont mindannyian egy vagy két győzelmet arattak, akkor ketten egyszer-eget, ketten pedig kétszer-kétszer győztek, hiszen összesen hat mérkőzés volt; a két egygyőzelmes versenyző egyike legyőzte a másikat, az elsőnek felsorolásában tehát csak két versenytársa (a másik és akit az legyőzött) szerepel.

Bizonyítjuk, hogy ha a résztvevők száma nem 2 vagy 4, akkor lehetséges olyan versenyeredmény, hogy minden versenyző megfelel a feladat követelményének.

Ezt először arra az esetre bizonyítjuk, amikor a versenyzők száma, n páratlan. Állítsuk a versenyzőket egy szabályos n -szög csúcaiba, arccal a sokszög középpontja felé. Ha mindenki azokat győzte le, akik jobboldalt állnak, akkor mindenki mindenkit felsorol. Ezt könnyű ellenőrizni.

Ha a versenyzők száma páros és 4-nél több, legyen közöttük n férfi és n nő. Ismét egy szabályos $2n$ -szög csúcaiba állítjuk őket, váltakozva férfiakat és nőket. Győzze le mindenki a jobbán állókat azzal a kivétellel, hogy a nők jobboldali másodsomszédjuktól vereséget szenvednek. Ilyen versenyeredményénél mindenki felsorolja minden versenytársát függetlenül attól, hogy a sokszög átellenes csúcaiban állók milyen eredménnyel mérkőznek. Ennek ellenőrzése sem nehéz.

A 7. ábra bemutatja az előírásunk szerinti versenyeredményeket 5 és 6 résztvevő esetében.



7. ábra

Az ábrán a nyíl a győztestől a vesztes felé irányul. A 6 versenyzős esetben az átellenesen állók mérkőzéseinek (elő sem írt) eredményét ábránk nem is jelzi.