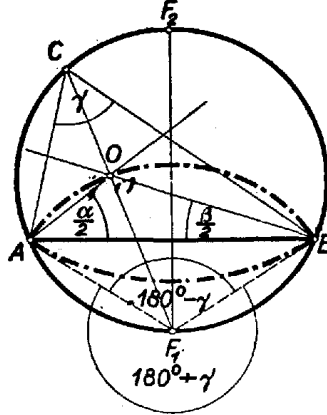


Alábbiakban közöljük a kezdők (I. osztály) versenyén kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai

1. feladat. Egy háromszög két csúcsát a kör kerületén rögzítjük, a harmadik csúcs végigfut a körön. Mi a háromszögbe írható körök középpontjának mértani helye?

I. megoldás: Legyen A és B a két rögzített pont, F_1 és F_2 az AB húrra merőleges átmérőnek végpontjai és C a harmadik csúcs, mely egyelőre mozogjon az AF_2B köríven (1. ábra).



1. ábra

A kerületi szögek tétele alapján az $ACB \sphericalangle = \gamma$ szög állandó. A beírt kör O középpontja a szögfelezők metszéspontja, így az

$$AOB \triangle - \text{ből az } AOB \sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

vagyis az O pontból az AB húr az állandó $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szög alatt látszik. Tehát az O pontok mértani helyének egy része az AB húrhoz tartozó, $90 + \frac{\gamma}{2}$ szögnek megfelelő látóköriív. E látóköriív középpontja az AB húrra merőleges F_1F_2 egyenesnek az a pontja, amelyben az ugyanazon íven nyugvó középponti szög $2\left(90 + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^\circ + \gamma$, vagyis amelyből az AB húr $360^\circ - (180^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma$ szög alatt látszik; ez a pont pedig az F_1 pont, mert az $ACBF_1$ húrnégyszögben az $AF_1B \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, mint a γ szöggel szembenfekvő szög.

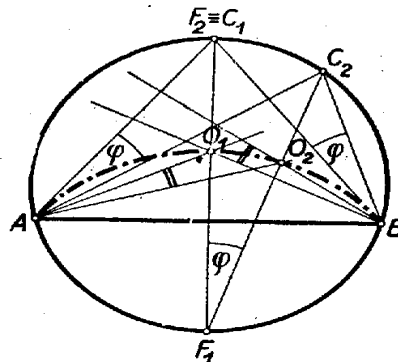
Ugyanúgy kimutatható, hogy ha a C pont a BF_1A íven mozog, akkor az O pont leírja az F_2 középpontú BA ívet. Tehát a feltételeket kielégítő O pontok szükségképpen az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, AB köríveken fekszenek. Meg kell még mutatnunk, hogy – fordítva – e köríveknek minden pontja eleget tesz a követelményeknek. Az $AOB \sphericalangle = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szög AO , ill. BO szárára tükrözzük az AB egyenest (1. ábra). A tükörképek az AB egyenessel, annak az F_2 -t tartalmazó oldalán $2 \cdot OAB \sphericalangle$ és $2 \cdot OBA \sphericalangle$ nagyságú szögeket zárnak be. E két szög összege

$$2(OAB \sphericalangle + OBA \sphericalangle) = 2 \left[180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right) \right] = 180^\circ - \gamma$$

tompaszög, tehát ezek az egyenesek metszik egymást az AB határolta, F_2 -t tartalmazó felsíkban és γ nagyságú szöget zárnak be. Ezek szerint C metszéspontjuk rajta van az AF_2B köríven és O , mint két szögfelező metszéspontja, az $ABC \triangle$ beírt körének középpontja, tehát megvan a mértani helyet definiáló tulajdonsága.

Most már kimondhatjuk, hogy a keresett mértani hely: az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, $\widehat{AB}$ körívek.

II. megoldás: Ha $C_1 \equiv F_2$, akkor az $AC_1B \triangle$ -be írt kör középpontja legyen O_1 (2. ábra).



2. ábra

Az AF_2B körív egy tetszőleges C_2 pontjához tartozó $ABC_2\Delta$ beírt körének középpontja, vagyis szögfelezőinek metszéspontja legyen O_2 . A változó C csúcspontból kiinduló szögfelező, a kerületi szögek tétele alapján, mindenkor átmege az F_1 ponton

$$C_1AC_2\angle = C_1F_1C_2\angle = C_1BC_2\angle = \varphi,$$

mint ugyanazon a köríven ($\widehat{C_1C_2}$) nyugvó kerületi szögek.

Ebből következik, hogy ha a háromszög f_c szögfelezője F_1 körül φ szöggel elfordul, akkor

1. az a és b oldal is φ szöggel fordul el és következésképpen
2. a másik két szögfelező $\frac{\varphi}{2}$ szöggel (az ábrán kétszeres ívvel jelölve) fordul el.

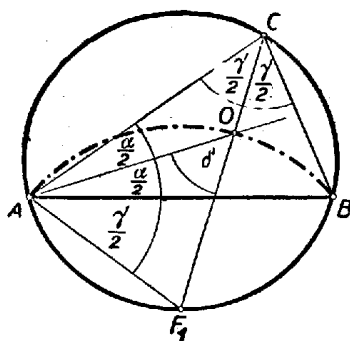
Tehát

$$O_1AO_2\angle = O_1BO_2\angle = \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kerületi szögek tétele megfordítható, ez azt jelenti, hogy az O_1 és O_2 pontok rajta vannak azon az $\widehat{AB}$ köríven, melynek az O_1O_2 ívhez tartozó középponti szöge $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$, és maga a középpont pedig rajta van az AB húrt merőlegesen felező F_1F_2 egyenesen. Mivel – mint láttuk – éppen $O_1F_1O_2\angle = \varphi$, azért az O pontokat tartalmazó $\widehat{AB}$ körív középpontja F_1 . A fenti bizonyítás megfordításával kimutatható, hogy a szóbanforgó körív minden pontja eleget tesz feltételeinknek.

Ugyanígy végezhető a bizonyítás az AF_1B körívre nézve.

III. megoldás: $F_1AB\angle = F_1CB\angle = \frac{\gamma}{2}$, mint kerületi szögek (3. ábra).



3. ábra

Az $AOC\Delta$ O -nál fekvő külső szöge δ egyenlő a két belső szög összegével, vagyis $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, amiből következik, hogy az $AOF_1\Delta$ egyenlő szárú, tehát

$$F_1O = F_1A.$$

Ugyanígy végezhető a szükségesség e bizonyítása az $\widehat{AF_1B}$ köríven fekvő C pontokhoz tartozó O pontokra nézve is. E bizonyítások megfordításból következik, hogy a szükséges feltétel elégséges is, és ezzel bebizonyítottuk, hogy az O pontok mértani helye az F_1 , és F_2 középpontú, A (és B) ponton átmenő köröknek, az adott kör belsejébe eső ívei.

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogyha négy egymásután következő természetes szám szorzatához 1-et adunk, négyzet-számot kapunk.

I. megoldás: Legyenek a számok: $a, a + 1, a + 2, a + 3$, ahol $a \geq 1$.

Feladatunk tehát az

$$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$$

kifejezést polinommal alakítani és arról kimutatni, hogy ez egy másik polinom négyzete.

$$(a^2 + a)(a^2 + 5a + 6) + 1 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1.$$

Ez a polinom csak olyan háromtagú polinom négyzeteként keletkezhetett, amelynek első tagja a^2 és harmadik tagja 1. A középső tagját, x -et, meg kell határozni.

$$(a^2 + x + 1)^2 = a^4 + 2a^2x + x^2 + 2a^2 + 2x + 1.$$

A nyert kifejezést összehasonlítva polinomunkkal nyerjük, hogy $x = 3a$ esetén a két polinom tagról-tagra megegyezik, tehát

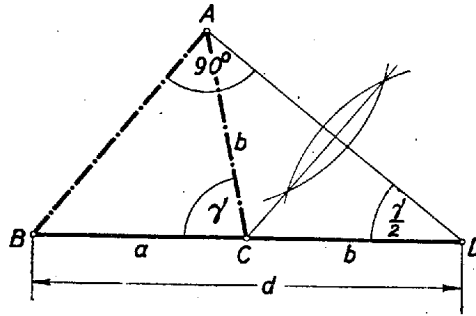
$$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2.$$

II. megoldás: Ügyesebb a szorzatot úgy csoportosítani, hogy az első és utolsó, továbbá a két középső tényezőt szorozzuk össze:

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3)+1 &= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1 = \\ &= (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1 = (a^2+3a+1)^2. \end{aligned}$$

3. feladat. Adva van egy háromszög két oldalának összege és a két oldal bezárta szög. Szerkesszük meg a háromszöget úgy, hogy a harmadik oldal a lehető legkisebb legyen.

I. megoldás: Legyen adva a $d = a + b$ távolság és a γ szög. Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra).



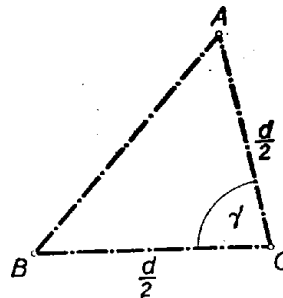
1. ábra

Ha az $a = BC$ oldalt C -n túl b -vel meghosszabbítjuk: $CD = b$ és így $BD = a + b = d$.

Az ADC egyenlőszárú háromszögnek a C csúcsnál fekvő külső szöge γ , és így az ADB szöge $\frac{\gamma}{2}$.

A szerkesztés kiindulása tehát: Az adott $d = BD$ távolság D végpontjában felmérjük az adott γ szög felét. Az így nyert száron lesz rajta az A pont. A $c = AB$ oldal pedig akkor lesz minimális, ha $BA \perp AD$. A szerkesztés következő lépése tehát: a B -ből a $\frac{\gamma}{2}$ szög megszerkesztett szárára bocsátott merőleges metszi ki az utóbbiból a keresett A csúcspontot. A szerkesztés befejező része: az AD szakaszt merőlegesen felező egyenes, amely fentiek szerint párhuzamos AB -vel, metszi ki BD -ből a C csúcspontot, amely e szerint felezőpontja a BD -nek, vagyis $a = b$.

II. megoldás: Az előbbieik alapján a legegyszerűbb szerkesztés a következő: a C csúcspontú γ szög szárait rámérjük a $\frac{d}{2} = CA = CB$ távolságot (2. ábra).



2. ábra

A II. forduló feladatai

1. feladat. Legyen

$$\begin{aligned} (1) \quad & a + b + c = 0, \\ (2) \quad & A + B + C = 0, \\ (3) \quad & \frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0 \end{aligned}$$

Mennyi az

$$aA^2 + bB^2 + cC^2$$

kifejezés értéke?

I. megoldás: Jelöljük a keresett kifejezés értékét X -szel. Mivel (2) alapján $A = -(B + C)$, $B = -(A + C)$ és $C = -(A + B)$, azért

$$\begin{aligned} X &= aA^2 + bB^2 + cC^2 = -[aA(B + C) + bB(A + C) + cC(A + B)] = \\ &= -aAB - aAC - bBA - bBC - cCA - cCB = \\ &= -AB(a + b) - BC(b + c) - CA(c + a). \end{aligned}$$

De (1)-ből $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$, és így a keresett

$$X = ABc + aBC + AbC = ABC \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} \right).$$

A zárójelben lévő kifejezés értéke (3) alapján 0, tehát

$$X = 0.$$

II. megoldás: Kiindulhatunk az (1)-ből, amely szerint $a = -(b + c)$, $b = -(a + c)$ és $c = -(a + b)$. Tehát

$$\begin{aligned} X &= aA^2 + bB^2 - cC^2 = -(b + c)A^2 - (a + c)B^2 - (a + b)C^2 = \\ &= -a(B^2 + C^2) - b(A^2 + C^2) - c(A^2 + B^2) = \\ &= -a(B + C)^2 - b(A + C)^2 - c(A + B)^2 + 2aBC + 2bAC + 2cAB. \end{aligned}$$

De (3)-ból ABC -vel szorozva (A , B és C nem lehet 0),

$$aBC + bAC + cAB = 0,$$

(2)-ből

$$(B + C)^2 = A^2, \quad (A + C)^2 = B^2, \quad (A + B)^2 = C^2,$$

és így

$$X = -aA^2 - bB^2 - cC^2 = -X,$$

amiből

$$X = 0.$$

III. megoldás: $(A + B + C)(aA + bB + cC) = 0$, mert az első tényező (2) alapján 0. A baloldalt átalakítva és az (1) alatti egyenletet figyelembe véve

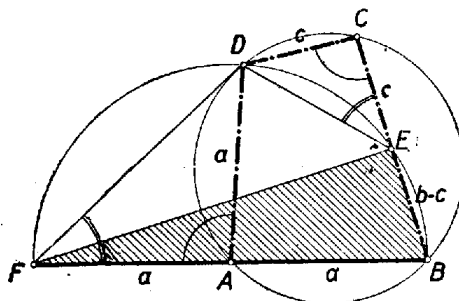
$$\begin{aligned} aA^2 + bB^2 + cC^2 + AB(a + b) + BC(b + c) + CA(c + a) &= \\ = X - ABc - BCa - CAa &= 0. \end{aligned}$$

(3) alapján a baloldal utolsó három tagjának összege 0 (lásd II. megoldást) és így

$$X = 0.$$

2. feladat. Szerkesszünk húrnégyszöget az oldalaiból, ha két szomszédos oldala egyenlő.

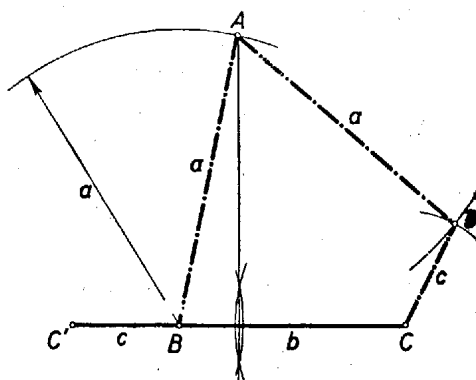
I. megoldás: Adva van az $ABCD$ húrnégyszögnek $AB = AD = a$, $BC = b$ és $CD = c$ oldala. Képzeljük a feladatot megoldottnak (1. ábra).



1. ábra

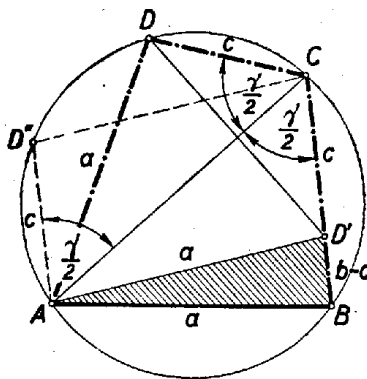
Az $FB = 2a$ átfogóból és $BE = b - c$ befogóból a BEF derékszögű háromszög (az 1. ábrán srafozva) egyszerűen megszerkeszthető, feltéve, hogy $2a > b - c$. A BEF derékszögű háromszög birtokában az A , C és D pontok megszerkesztése már nem okoz nehézséget.

Mivel húrnegyszögünk egy íves $D\triangleleft$ -e egyenlő a szemközti $B\triangleleft$ egy ívvel jelzett mellékszögeivel, azért a C pont elforgatása, C' a CB oldal meghosszabbítására kerül. Mivel $AC = AC'$, azért az A pont egyrészt rajta van a CC' távolságot merőlegesen felező egyenesen, másrészt pedig a B középpontú a sugarú körön. A szerkesztést a 3. ábra mutatja.



Megoldás van, ha $a > \frac{b-c}{2}$, vagyis $2a > b-c$.

III. megoldás: Képzeliük a feladatot megoldva és használjuk az eddigi jelöléseket. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b > c$ (4. ábra).



4. ábra

$AB = AD$, tehát a fölöttük levő C -t nem tartalmazó körívek is egyenlők. Így a kerületi szögek tétele alapján a CA átló felezi a C -nél fekvő γ szöget, tehát a D pontnak az AC átlóra vonatkozó tükörképe D' ráesik a b oldalra és $BD' = b - c$. (D' tehát azonos az I. megoldásban szerepelt E ponttal). Az ABD' egyenlőszárú háromszög (a 4. ábrán srafozva) az a és $b - c$ szakaszokból könnyen megszerkeszthető. (E háromszögnek a keresett húrnégyszöggé való kiegészítése már triviális.)

Lényegében ugyanennek a háromszögnek megszerkesztésére vezet, ha D -nek megszerkesztjük az AC átlót merőlegesen felező egyenesre vonatkozó D'' tükörképét (4. ábra). Mivel a CAD'' a tükrözés folytán $\frac{\gamma}{2}$, azért a váltószögek törvénye alapján $AD'' \parallel BC$, vagyis $BCD''A$ egyenlőszárú trapéz, amely az adatokból (a szár, $b \parallel c$) szerkeszthető. A szerkeszthetőség feltétele, hogy $2a > b - c$.

3. feladat. Három természetes számról a következőket tudjuk:

- mind a három szám különböző;
 - összegük 406;
 - legnagyobb közös osztójuk 2-nél nagyobb törzsszám (jelöljük p -vel)
 - ha az egyes számokat elosztjuk p -vel ismét 3 törzsszámot kapunk (legyenek ezek p_1, p_2, p_3).
- Melyek ezek a számok? Megjegyezzük, hogy 1 nem törzsszám.

Megoldás: A feladat szerint

$$pp_1 + pp_2 + pp_3 = I(p_1 + p_2 + p_3) = 406 = 2 \cdot 7 \cdot 29,$$

ahol

$$p > 2, \text{ és } 1 < p_1 < p_2 < p_3.$$

Tehát $p = 7$, vagy $p = 29$.

Ha $p = 7$, akkor $p_1 + p_2 + p_3 = 2 \cdot 29 = 58$.

3 törzsszám összege csak úgy lehet páros, ha egyikük (nyilván a legkisebbik) közülük 2.

Tehát $p_1 = 2$, és így

$$p_2 + p_3 = 56.$$

Ezt az egyenlőséget csak a következő három törzsszámpár egyenlíti ki:

$$3 + 53, \quad 13 + 43 \quad \text{és} \quad 19 + 37.$$

Ha $p = 29$, akkor $p_1 + p_2 + p_3 = 2 \cdot 7 = 14$. Mivel szükségképpen most is $p_1 = 2$, azért

$$p_2 + p_3 = 12,$$

mely esetben csak az $5 + 7$ törzsszámpár felel meg.

Tehát összesen 4 megoldás van:

$$14, \quad 21, \quad 371;$$

$$14, \quad 91, \quad 301;$$

$$14, \quad 133, \quad 259;$$

$$58, \quad 145, \quad 203.$$

A haladók versenyén kitűzött feladatok megoldását a jövő számunkban közöljük.