

A valószínűségszámítás egyik legfontosabb fogalma a *várható érték*. Több más elnevezése is használatos: matematikai remény, átlag, átlag-érték, közép-érték, ezek azonban mind egyetlen egy fogalmat jelentenek. Keletkezési ideje körülbelül megegyezik a valószínűség fogalma kialakulásának a korszakával; először HUYGENS (ejtsd: hajhensz; holland matematikus és fizikus 1629–1695) használta 1657-ben a »Szerencsejátékkal kapcsolatos számításokról« című értekezésében.

Hogy a gyakorlati jelentőségéhez közelebb férközzünk, vizsgáljunk meg először egy egyszerű példát. Péter és Pál kockázik. Ha 6-ost dobna, Péter kap Páltól 5 forintot, ha pedig a többi öt számjegy valamelyike az eredmény, akkor Pál kap Pétertől 1 forintot. Kérdés, hogy ha nagyon sokszor dobják fel egymás után a kockát, melyikük számára lesz előnyös a játék? A problémát könnyű eldönteni. Elég, ha Péter pénzét vizsgáljuk, mert hiszen amennyit ő nyert, ill. veszített, annyit veszített, ill. nyert Pál. Annak a valószínűsége, hogy egy dobás alkalmával Péter nyerjen $\frac{1}{6}$, hogy veszítsen $\frac{5}{6}$. Ha tehát igen sok, mondjuk n dobást végeznek egymásután, akkor a nagy számok törvénye értelmében Péter kb. $\frac{n}{6}$ esetben nyer, $\frac{5n}{6}$ esetben veszít. n dobás után tehát kb.:

$$\frac{n}{6} \cdot 5 - \frac{5n}{6} \cdot 1 = 0$$

forinttal változott meg a pénze. A játék tehát egyikükre nézve sem előnyös, de nem is hátrányos. Ha egy 6-os dobással Péter nem 5, hanem pl. 6 forintot nyerne, akkor n dobás után (feltéve, hogy n elég nagy szám), nyereségre számíthat, mégpedig a nyereség összege kb.:

$$\frac{n}{6} \cdot 6 - \frac{5n}{6} \cdot 1 = \frac{n}{6} > 0.$$

Ha ezt a nyereséget elosztjuk n -nel, megkapjuk az egy játékra eső nyereség-összeget, amely a mi esetünkben $\frac{1}{6}$ Ft. Péter számára tehát ez a játék előnyös volna, Pál számára hátrányos.

Általában, ha v_1 annak a valószínűsége, hogy Péter nyerjen, mégpedig a forintot, és v_2 , hogy veszítsen b forintot, akkor n számú játék esetében (feltéve, hogy n elég nagy) Péter pénze kb.

$$nv_1a - nv_2b$$

forinttal fog megváltozni. Ebből egy játékra

$$v_1a - v_2b$$

összeg esik. Hogy a játék melyikükre nézve előnyös, az attól függ, hogy az összeg pozitív, vagy negatív, és hogy mennyire előnyös, azt ennek az összegnek a nagysága mutatja. Ha

$$v_1a - v_2b = 0$$

akkor a játék méltányos, egyikükre nézve sem előnyös.

Tehát, ha csak kétféle eredményről lehet szó (A nyer B -től a forintot v_1 valószínűséggel, vagy B nyer A -tól b forintot, v_2 valószínűséggel), akkor a játék igazságos, ha

$$v_1a = v_2b, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a}{b} = \frac{v_2}{v_1}.$$

a tulajdonképpen B -nek a tétje, b pedig A -nak a tétje, és a fenti azonosság azt fejezi ki, hogy a játék vagy fogadás igazságos, ha a tétek aránya egyenlő a megfogadott események valószínűségének arányával.

Tegyük fel most, hogy megváltoztatják a játékszabályokat a következő módon: ha a dobás eredménye 1 vagy 2, Péter nyer 1, ha 4, 5, vagy 6, ugyancsak ő nyer 2 forintot, míg ha 3-ast dobna, veszít 5 forintot. Az előbbi módon eljárva azt kapjuk, hogy Péter pénze megváltozásának egy játékra eső része

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{8}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ebben az esetben a játék Péterre előnyös, mert átlagban játékként $\frac{1}{2}$ forintot nyer, ami azt jelenti, hogy pl. 100 játék esetén kb. 50 forint nyereségre számíthat.

Tekintsük Péter veszteségét negatív nyereségnek (–5 Ft), a játszmat pedig nevezzük el kísérletnek, akkor tehát a kísérletnek három lehetséges eredménye van. Az eredményeket számszerűleg, az 1, 2, –5 számok fejezik ki, amelyek rendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ valószínűségekkel következnek be.

Általában, ha egy kísérlet lehetséges eredményét az

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

számok jelzik¹, melyek rendre

$$v_1, v_2, \dots, v_N, \quad (v_1 + v_2 + \dots + v_N = 1)$$

valószínűséggel következnek be, az

$$M = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_N x_N$$

értéket várható értéknek nevezzük. Gyakorlati jelentősége: nagyszámú kísérlet esetén a kapott összeredménynek egy kísérletre eső része. Ugyanis ha n kísérletet végezzünk, ahol n elég nagy szám ahhoz, hogy a nagy számok törvénye értelmében

$$v_i \approx \frac{k_i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

legyen (ahol k_i jelenti azt a számot, hogy az i -edik esemény hányszor következik be n kísérlet közül; $k_1 + k_2 + \dots + k_N = n$), akkor

$$M \approx \frac{k_1}{n} x_1 + \frac{k_2}{n} x_2 + \dots + \frac{k_N}{n} x_N = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_N x_N}{n}.$$

Az M várható érték mindig az $x_1, x_2, \dots, x_N$ értékek legkisebbike és legnagyobbika közé esik. Ugyanis, ha az

$$M = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_N x_N$$

kifejezésben x_i helyett ezek legnagyobbikát, $\max_{1 \leq i \leq N} x_i$ teszünk, akkor az összeget nem csökkentettük, ha pedig min-

denített $\min_{1 \leq i \leq N} x_i$ írunk, akkor nem növeltük. Mivel továbbá $v_1 + v_2 + \dots + v_N = \sum_{i=1}^N v_i = 1$, azért

$$\min_{1 \leq i \leq N} x_i = \min_{1 \leq i \leq N} x_i \sum_{i=1}^N v_i \leq M \leq \max_{1 \leq i \leq N} x_i \sum_{i=1}^N v_i = \max_{1 \leq i \leq N} x_i.$$

nM tehát az n kísérlet során kapott összeg. Ez azonban csak akkor áll fenn, a gyakorlat csak akkor igazolja, ha n elég nagy szám. Nem lehet tehát azt mondani, hogy mivel nM az n kísérlet során kapott összeg, azért n helyébe 1-et téve, M nem más, mint az egy kísérlet által kapott érték. Mégis abban az esetben, ha az $x_1, x_2, \dots, x_N$ számok egy valamilyen érték körül tömörülnek oly módon, hogy az ettől az értéktől távolos x_k tagokhoz tartozó v_k valószínűségek nagyon kicsinyek, más szóval, ha az $x_1, x_2, \dots, x_N$ értékeknek az előbbi értelemben vett »szórása« kicsi, akkor egy kísérlet esetében is a kísérlet eredménye nagy valószínűséggel közel fog esni M értékéhez. Ennek a bizonyítására azonban már nem térünk ki, csak megjegyezzük, hogy egyetlen kísérlet esetében mindig meg kell vizsgálnunk, hogy a szórás milyen, tehát gyakorlatilag csak akkor alkalmazhatjuk sikerrel a várható érték fogalmát.

Végül meg kell említenünk, milyen nagy hasonlóság van a mechanikai tömegközéppont és a várható érték fogalma között. Ha a számegyenesen az $x_1, x_2, \dots, x_N$ pontokba rendre elhelyezzük a $v_1, v_2, \dots, v_N$ tömegű pontokat, akkor ezek tömegközéppontjának a helye megegyezik várható érték helyével a számegyenesen.

Nézzünk most néhány példát.

1. Valakinek annyi forintot ígérnek, ahányszor az első dobástól kezdve egymás után csupa írást dob egy pénzdarabbal, legfeljebb N dobásból. Mennyi a nyeremény várható értéke?

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy pontosan k -szor dob egymás után írást, nem más, mint az $\underbrace{1 \ 2 \ \dots \ k}_{k+1}$ sorozat valószínűsége, vagyis $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. Tehát 1 forintot $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ valószínűséggel nyer, 2 forintot $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ valószínűséggel stb. A várható érték tehát

$$M = 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + N \cdot \frac{1}{2^{N+1}} = \sum_{k=1}^N k \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Pl., ha $N = 5$, akkor a várható érték

$$M = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \frac{5}{64} = \frac{57}{64}.$$

2. Két csapat röplabdázik. Annak valószínűsége, hogy az A csapat nyer egy játszmát v_A , hogy a B csapat nyer egy játszmát, v_B ($v_A + v_B = 1$). A mérkőzést az a csapat nyeri, amelyik előbb nyer három játszmát. Mennyi a lejátszandó játszmák várható száma?

Megoldás: Legalább 3 és legfeljebb 5 játszmát kell játszani. Jelöljük a megfelelő valószínűségeket v_3, v_4 ill. v_5 -tel ($v_3 + v_4 + v_5 = 1$).

¹Bennünket most csak olyan kísérletek érdekelnek, amelyek eredményei számszerű adatok. Ha azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy kártyacsomagból milyen színű kártyát húzunk ki, ezzel a problémával kapcsolatban nincs értelme várható értékről beszélni.

²Olvasd: szumma v_i , $i = 1$ -től N -ig.

3 játszmával akkor ér véget a mérkőzés, ha vagy az A , vagy a B csapat nyer 3 játszmát egymásután, tehát

$$v_3 = v_A^3 + v_B^3.$$

4 játszma esetén az egyik fél nyer hármat, a másik 1-et, de az utóbbi lehet az első, második, vagy harmadik játszma, tehát

$$v_4 = 3v_A^3v_B + 3v_Av_B^3 = 3(v_A^3v + v_Av_B^3).$$

Hasonló megfontolással

$$v_5 = \binom{4}{2}(v_A^3v_B^2 + v_A^2v_B^3).$$

A várható érték tehát

$$M = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5.$$

Numerikus példa: Legyen $v_A = \frac{2}{3}$, $v_B = 1 - v_A = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} v_3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{9}{27}, \\ v_4 &= 3\left(\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27}\right) = \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{10}{27}, \\ v_5 &= 6\left(\frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27}\right) = \frac{16}{81} + \frac{8}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Tehát

$$M = 3 \cdot \frac{9}{27} + 4 \cdot \frac{10}{27} + 5 \cdot \frac{8}{27} = \frac{107}{27} \approx 3,96.$$