

A középiskolai anyagban két nevezetes számsorozat vizsgálata szerepel. Az elsőnél valamely a_1 kezdőelemből kiindulva az $(n+1)$ -edik tagot, a_{n+1} -et az n -edik tag, a_n ismeretében úgy kapjuk meg, hogy az n -edik taghoz egy állandó d számot adunk hozzá. Képletben

$$(1) \quad a_{n+1} = a_n + d \quad n = 1, 2, \dots$$

Itt persze a_1 és d nem szükségképp pozitív egészek. Mint tanultuk, e sorozat n -edik tagja a_1 és d ismeretében rögtön előállítható anélkül is, hogy az összes közbülső tagokat kiszámítanánk, az

$$(2) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

formula szerint. Ebből a sorozat szerkezete világosan látható. A másik számsorozat azon $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ számsorozat, melynél adott b_1 elemből kiindulva az n -edik és $(n+1)$ -edik tagok közötti összefüggés az (1) formula helyett

$$(3) \quad b_{n+1} = b_n q$$

alakú, vagyis az $(n+1)$ -edik tagot az n -edikből úgy kapjuk, hogy az n -edik tagot egy előre adott, n -től független q számmal szorozzuk: A b_1 és q persze itt sem szükségképp pozitív egészek. Itt is kiderül, hogy az n -edik tag meghatározására nem kell az összes közbülső tagokat kiszámítani, hanem fennáll az, hogy

$$(4) \quad b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Ezáltal tehát a b_n sorozat szerkezete is világosan meg van határozva. Előfordult azonban a középiskolában más számsorozat is, mely csupa egész számból állott, ha erre a figyelmet külön nem is hívtuk fel. E sorozat a prímszámok sorozata; így nevezzük mindazon számokat, melyek *csak* 1-gyel és önmagukkal oszthatók. E sorozat az előzőktől abban is különbözik, hogy értelmezése nem úgy történt, mint (1) és (3)-ban, vagyis ú. n. *rekurzív* módon, hanem direkt módon, tehát egy egész számról *közvetlenül* eldönthetem, hogy a sorozat tagja-e, vagy sem. E sorozat szerkezetének feltárása azonban az előbbieknél lényegesen nehezebb és (2), ill. (4)-hez hasonló képletek, melyekkel az n -edik prímszám rögtön felírható volna, mint n függvénye, nem ismeretesek. Ilyen esetekben tehát igényeinket mérsékelnünk kell; meg kell általában elégednünk azzal, hogy a sorozatnak egy intervallumba eső elemeinek számára lehetőleg jó közelítő értékeket tudjunk megadni.

A következőkben kétfajta sorozattal fogunk foglalkozni; ezek mindjárt azt is mutatni fogják, mennyire nem kell messze menni ahhoz, hogy nehéz és eddig megoldatlan matematikai problémákhoz jussunk. Ezek elsője a prímszámok azon tulajdonságát veszi alapul, hogy azok egyike sem osztható a másikával; a pozitív egészeknek oly véges vagy végtelen

$$c_1 < c_2 < \dots$$

sorozatát fogjuk vizsgálni (melyben tehát c_n a sorozat n -edik tagját fogja jelölni), melyben valamelyik c_i -elem csakis akkor lehet egy sorozatbeli c_j -nek osztója, ha $i = j$, vagy másképp, a sorozat két *különböző* eleme sohasem lehet olyan, hogy egyik osztható a másikkal. Ilyen tulajdonságú sorozat nagyon sok írható fel. Pl.

$$3, 5, 7, 8, 13, 18 \quad 5, 6, 9, 11, 14, 16, 17$$

egy-egy ilyen sorozat. E sorozatokat a következőkben közös névvel nevezzük C -sorozatoknak. Foglalkozunk először a véges C -sorozatok esetével. Intuitíve érezhető, hogy, ha egy határ alatt $\gg$ túl $\ll$ sok egész szám van adva, ezek között már lesz legalább két olyan, melyek egyike osztható a másikával. Pontosabban kifejezve, tehát azt kérdezzük, hogy egy olyan C -sorozatnak, melynek minden tagjai $\leq n$, legfeljebb hány tagja lehet; e maximális tagszámot jelöljük $M(n)$ -nel. Legyen először n páros, azaz

$$n = 2l.$$

Hogy

$$M(2l) \geq l,$$

az onnan világos, hogy meg lehet adni egy olyan C -sorozatot igen könnyen, melynek l számú, $2l$ -et meg nem haladó tagja van. Egy ilyen alkotnak nyilván az

$$l+1, \quad l+2, \quad \dots, \quad 2l-1, \quad 2l$$

számok, hiszen ezek közül vett bármely kettőnek a kisebbike is legalább $l+1$ a nagyobbika viszont legfeljebb $2l$, tehát nem érheti el a kisebbiknek a kétszeresét sem, nem lehet tehát meg benne egész számszor.

Azt állítjuk azonban, hogy ennél több tagú C -sorozat, melynek tagjai nem haladják meg a $2l$ -et, nincs is, azaz

$$(5) \quad M(2l) = l.$$

Ezen állítás úgy is megfogalmazható, hogy bárhogy is adunk meg $l+1$ számú különböző egész számot,

$$(6) \quad c_1 < c_2 < \dots < c_{l+1} (\leq 2l),$$

ezek között már van legalább két olyan szám, melyek kisebbike osztója a nagyobbiknak. A tétel Erdős Páltól származik; erre két bizonyítást fogunk elmondani. Az első egy *direkt bizonyítás*, mely az ú. n. skatulya-elven alapszik.¹ Ez azt mondja ki, hogy ha m darab skatulyába $(m + 1)$ darab tárgyat kell elhelyeznünk, akkor legalább egy olyan skatulya lesz, melybe legalább két tárgy esik. Ennek segítségével a bizonyítás a következőképp végezhető el. Állítsuk elő a (6) alatti számokat

$$(7) \quad c_j = 2^{u_j} v_j$$

alakban, ahol v_j páratlan és u_j egész, mely természetesen lehet 0 is. Ezen v_j és u_j nyilván egyértelműen meg vannak határozva. Mivel v_j páratlan, tehát értéke csak az

$$1, 3, 5, \dots, (2l - 1)$$

számok közül való lehet. Tehát a v_j -k *lehetséges értékeinek* száma legfeljebb l , míg a v_j száma feltevés értelmében $l + 1$. De ekkor az előbbi skatulya-elv alapján a v_j -ket véve tárgyakul őket lehetséges értékeik szerint l skatulyába téve (t. i. közös skatulyába téve, az egyforma értékű v_j -ket) adódik, hogy legalább két v_j esik ugyanazon skatulyába, azaz a v_j -k között van legalább kettő, amelyik egyenlő, pl.

$$v_i = v_k.$$

De ekkor már azt állítjuk, hogy a (6) alatti c_j -számok közül ezen i és k indexekkel képezett c_i és c_k már a kívánt tulajdonsággal bírnak, azaz valamelyikük osztható a másikkal. Ha u. i.

$$u_i \geq u_k,$$

akkor máris kapjuk, hogy

$$\frac{c_i}{c_k} = 2^{u_i - u_k} \frac{v_i}{v_k} = 2^{u_i - u_k} = \text{egész},$$

amivel az állítás máris be van bizonyítva.

A második bizonyítás e tételt teljes indukcióval bizonyítja be.¹ $l = 1$ és $l = 2$ -re a tétel kipróbálással könnyen belátható. Tegyük fel tehát, hogy a tétel igazolva van

$$(8) \quad l = 1, l = 2, \dots, l = L - 1$$

-re, ahol tehát feltételezhetjük, hogy

$$(9) \quad L \geq 3.$$

Vagyis bizonyítottunk feltételezzük, hogy

$$(10) \quad M(2l) = l, \quad l = 1, 2, \dots, (L - 1),$$

és nézzük a tételt $l = L$ -re. Tegyük fel tehát állításunkkal ellentétben, hogy volna egy $(L + 1)$ -tagú

$$(11) \quad 1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_{L+1} \leq 2L$$

számsorozat, mely egy C -sorozatot alkotna és megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Nézzük először meg, hogy ezen d -k közül hányra lehet igaz, hogy

$$d_h \leq 2L - 2.$$

A (10) alatti feltevést $l = L - 1$ -gyel alkalmazva, nyerjük, hogy ezek száma legfeljebb $L - 1$. Mivel a (11) alatti $d - k$ teljes száma $L + 1$, ez csak úgy lehetséges, ha

$$(12) \quad d_L = 2L - 1, \quad d_{L+1} = 2L$$

és persze

$$(13) \quad (1 \leq) d_1 < d_2 < \dots < d_{L-1} \leq 2L - 2.$$

Azt állítjuk, hogy a (13) alatti d -k értéke L nem lehet. Ez egyszerűen azért igaz, mert ellenkező esetben a (11) sorozatban máris volna két oly elem, melyek egyike osztója másiknak; nyilván L és $2L$ ilyen elemek volnának. De ugyanezen okból d -nek bármely osztója sem léphet fel a (13) alatti d -k között, azaz²

$$(14) \quad d_h \neq u, \quad \text{hacsak} \quad u/L.$$

¹ E bizonyítás *Vázsonyi* Endrétől és *Wachsberger* Mártától származik.

¹ E bizonyításra tőlem függetlenül *Lázár* Dezső barátom is rájött, aki 1943-ban a fasizmus áldozata lett.

² A/B jelentése A osztója B-nek.

Tehát L minden esetre betoldható a (13) számok közé; ha a v azon index, melyre

$$d_v < L < d_{v+1},$$

akkor tekintsük (13) helyett az L -tagból álló

$$(15) \quad d_1 < d_2 < \dots < d_v < L < d_{v+1} < \dots < d_{L-1}$$

sorozatot. Erre az indukciós feltevést $l = L - 1$ -gyel alkalmazva nyerjük, hogy elemei közt van legalább két olyan, hogy egyik osztója a másiknak. Állítás, hogy L ezek közül egyik sem lehet. Ha u. i. az egyik ily elem L volna, akkor a másik elem L osztója vagy többese volna; az első eshetőség (14) által van kizárva, a másik pedig azért, hogy L legkisebb többszöröse $2L$ volna és ez nem tartozhat a (15) alatti sorozathoz, hiszen ennek tagjai nem nagyobbak, mint $2L - 2$. Tehát a (15) sorozat L -től különböző tagjai között kell lennie kettőnek, melyek egyike a másiknak osztója. De előbbiek szerint ezek már az eredeti (13) sorozatnak is elemei, s így annak kiválasztása szerint egyik sem lehet osztható a másikkal. Ezzel tehát az állítást $l = L$ -re is igazoltuk.

Mi lesz a helyzet $M(2l + 1)$ -gyel, azaz legfeljebb hány oly egész szám van, melyek értéke legfeljebb $2l + 1$ és melyek egyike sem osztható a másikkal? Mint az

$$l + 1, l + 2, \dots, 2l, 2l + 1,$$

sorozat példája mutatja.

$$M(2l + 1) \geq l + 1.$$

Ha viszont volna oly C -sorozat, melynek $l + 2$ oly tagja volna, melyek nem nagyobbak, mint $2l + 1$, akkor egyben

$$M(2l + 2) \geq l + 2$$

is volna, ami azonban (10)-nek ellentmond. Tehát

$$(16) \quad M(2l + 1) = l + 1.$$

Összefoglalhatjuk (10) és (16) eseteit, ha bevezetjük a $[x]$ jelzést azon legnagyobb egész szám jelzésére, mely még nem nagyobb, mint x (tehát pl. $[3,1] = 3$, $[4] = 4$). Azt állítjuk, hogy (10) és (16)-ból minden n -re

$$(17) \quad M(n) = \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Ha u. i. $n = 2l$, akkor ebből tényleg

$$M(2l) = \left[\frac{2l+1}{2} \right] = l.$$

és, ha $n = 2l + 1$ akkor

$$M(2l + 1) = \left[\frac{(2l+1)+1}{2} \right] = l + 1.$$

Ezzel tehát minden véges n -re sikerült meghatározni azt, hogy azon C -sorozatok között, melyek elemei nem nagyobbak, mint n , mi az elérhető maximális tagszám. Mi a helyzet végtelen sorozatokra vonatkozólag? Van-e ilyen egyáltalán? A prímszámok sorozata erre rögtön ad példát. Tehát ilyen sorozatokra a maximális tagszám kérdésének nincs értelme. Hogy lehet azonban végtelen számsorozatok sűrűség szempontjából mégis összehasonlítani? Ha pl. az

$$(18) \quad \begin{array}{l} 1, 2, 3, \dots \\ 1^2, 2^2, 3^2, \dots \end{array}$$

sorozatokat összehasonlítjuk, intuitíve azt érezzük, hogy az előbbi sorozat sűrűbb, mint a másik. Erre nyilván az ad okot, hogy bármely $x \geq 2$ pozitív szám alá a (18) első sorozatából több esik, mint a másodikból. Ez azt a gondolatot ébreszti, hogy egy végtelen sorozat $\gg$ sűrűségét $\ll$ értelmezhetjük a

$$\frac{B(x)}{x} \quad x = 2, 3, \dots$$

nem-negatív számok segítségével, ahol $B(x)$ az adott sorozatunk azon elemeinek számát jelenti, melyek nem haladják meg x -et. Ezen számok segítségével többféleképp lehet egy végtelen számsorozat sűrűségét értelmezni, melyek mindegyikének megvan a maga alkalmazása. Itt e finom fogalmakat persze nem értelmezhetjük pontosan, de néhányat intuitíve megvilágíthatunk. Ha a számsorozatunk pozitív, növekvő számokból áll, akkor a $\frac{B(x)}{x}$ hányados fix x mellett

azt fejezi ki, hogy az x alatti egészek hány százaléka esik a mi sorozatunkba. Ha mármost van oly pozitív ϑ tört, hogy minden elég nagy x -re,

$$(19) \quad \frac{B(x)}{x} \leq \vartheta,$$

akkor azt mondjuk, hogy sorozatunk felső sűrűsége $\leq \vartheta$. Nézzük meg, mit lehet az eddigiek alapján egy végtelen C -sorozat felső sűrűségére kimondani. (17) alapján, felhasználva azt, hogy általában

$$[\mu] \leq \mu,$$

nyerjük, hogy

$$\frac{B(x)}{x} \leq \frac{M(x)}{x} = \frac{\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor}{x} \leq \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x},$$

azaz ϑ helyett $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ -t véve, ha ε tetszőleges kis szám is, (19) fennáll. Vagyis egy tetszőleges végtelen C -sorozat felső sűrűsége tetszőleges kis pozitív ε esetén $\leq \frac{1}{2} + \varepsilon$. Biztos-e azonban itt is, hogy ezt nem lehet javítani? Az előbb felhozott

$$l+1, l+2, \dots, 2l$$

alakú sorozatok különféle l -ekre nem foghatók fel egy ugyanazon *végtelen* sorozat részeként. Mégis ki lehet mutatni, hogy a felső sűrűségre vonatkozó tétel sem javítható, amit egy kissé pongyola formában úgy lehet kimondani, hogy megadható oly végtelen C -sorozat, melyhez végtelen sok oly x található, mely alatt sorozatunk az összes egész számoknak majdnem 50%-át tartalmazza. E mélyebb eredmény bizonyításával azonban itt nem fogunk foglalkozni.

Térjünk rá most második típusú sorozataink vizsgálatára, melyeket rövidség kedvéért nevezzünk D -sorozatoknak. Ezekről követeljük meg azt, hogy ne legyen bennük egyetlen számtani sornak három egymásutáni tagja sem. Más alakban e követelmény azt mondja ki, hogy az

$$(20) \quad x + y = 2z, \quad x \neq y$$

egyenletnek ne legyen oly megoldása, melyre az x, y, z számok mindegyike az adott D -sorozatba esik. Lehet-e találni egyáltalán *végtelen* D -sorozatot? Itt már nem olyan magától értetődő, mint az előbb, hogy ilyen sorozat létezik. Könnyű azonban kimutatni, hogy pl. a

$$(21) \quad 3^0, 3^1, 3^2, \dots$$

sorozat D -sorozat. Ez azt jelenti, hogy nem állhat fenn

$$(22) \quad 3^x + 3^y = 2 \cdot 3^z, x \neq y,$$

alakú egyenlet, ahol x, y, z nem-negatív egészek. Mert tegyük fel, hogy (22) teljesülne és ebből egy ellentmondást fogunk levezetni. Mindenesetre leoszthatunk 3-nak annyiadik hatványával, amekkora az x, y, z számok közül a legkisebb; ami által egyenletünk

$$(23) \quad 3^u + 1 = 2 \cdot 3^v$$

vagy

$$(24) \quad 3^u + 3^v = 2$$

alakok egyikét veszi fel, ahol az első esetben

$$(25) \quad u > 0, \quad v \geq 0,$$

és a második esetben

$$(26) \quad u > v \geq 0.$$

A (24)–(26) egyenlet nyilván nem oldható meg, mert csak $u = v = 0$ esetben lehetséges. A (23) egyenletre vonatkozólag $u > 0$ miatt a baloldal nagyobb 2-nél, tehát $v > 0$; de akkor a (23) egyenlet azért lehetetlen, mert a jobboldal osztható 3-mal, a baloldal pedig nem.

Végtelen D -sorozatok esetén a (21) alattinál jóval sűrűbb D -sorozatok is képezhetők. Egy ilyen sorozatot nyerünk már akkor is, ha azokat az egész számokat vesszük, melyek előállíthatók

$$e_0 + e_1 \cdot 3 + e_2 \cdot 3^2 + \dots + e_n \cdot 3^n$$

alakban, úgy, hogy az e_i »számjegyek« értéke 0 vagy 1. Itt nem fogunk foglalkozni sem annak bebizonyításával, hogy e számok egy D -sorozatot alkotnak, sem azzal, hogy e sorozat sűrűségét megvizsgáljuk; csupán azt jegyezzük meg, hogy e sorozat jóval ritkább, mint az előző problémában bizonyítás nélkül meg, említett végtelen C -sorozat.

Milyen felső becslést lehet kimondani egy *véges* D -sorozat tagszámára? Jelöljük $F(n)$ -nel azon D -sorozatok maximális tagszámát, melyek minden egyes tagja legfeljebb n . Párhuzamban az előző vizsgálatokkal, kérdezzük, igaz-e itt is, hogy

$$(27) \quad F(2N) \leq N?$$

Mint látni fogjuk, ez igaz lesz, hacsak

$$(28) \quad N \geq 8.$$

A tételt indukcióval fogjuk bizonyítani, éspedig az indukció egy szokatlan fajtájával, melyet » n -ről $(n+4)$ -re való következtetés«-nek nevezhetünk; a bizonyítás arra is jó lesz, hogy belássuk, hogy az indukció »elejénél« nem szabad elhamarkodottan eljárnunk. A bizonyításhoz két egyszerű megjegyzésre lesz szükség. Legyen

$$(29) \quad 1 \leq g_1 < g_2 < \dots < g_r \leq n$$

egy D -sorozat; állítás, hogy az

$$(30) \quad n+1-g_r < n+1-g_{r-1} < \dots < n+1-g_1 (\leq n),$$

ill.

$$(31) \quad g_1 - k < g_2 - k < \dots < g_r - k \quad (k < g_1)$$

sorozatok maguk is D -sorozatok. Ha ez nem volna igaz, akkor volna a (30), ill. (31) sorozatnak három olyan tagja, g_i , g_j , g_l melyekre

$$(n+1-g_i) + (n+1-g_j) = 2(n+1-g_l),$$

ill.

$$(g_i - k) + (g_j - k) = 2(g_l - k).$$

De mindkettőből

$$g_i + g_j = 2g_l$$

következne, ami máris ellentmond annak, hogy a (29) sorozat D -sorozat.

Mivel 8 elemből 5-öt $\binom{8}{5} = 56$ -féleképp választhatunk ki, kipróbálással igazolható, hogy

$$F(8) \leq 4.$$

Mivel az

$$1, 2, 4, 5$$

sorozat D -sorozat, tehát

$$(32) \quad F(8) = 4.$$

Azt állítjuk, hogy

$$(33) \quad F(10) = 5.$$

Mindenesetre az

$$1, 2, 4, 9, 10$$

sorozat nyilván D -sorozat, azaz

$$F(10) \geq 5.$$

Ha $F(10) \leq 6$ volna, akkor tehát volna oly 6 tagú D -sorozat, melynek tagja, 10-nél nem nagyobbak. Ha ezek között a 9 és 10 mindketten nem szerepelnének akkor a sorozatnak öt oly tagja volna, mely 8-nál nem nagyobb; ez azonban ellentmond annak, hogy $F(8) = 4$. További állítás, hogy 1 és 2 is szerepelne e hattagú sorozatban. Ha u. i. nem szerepelnének, akkor (30)-at alkalmazva, oly hattagú sorozathoz jutnánk, melyben 9 és 10 és közül legalább az egyik hiányzik; azt azonban az előbb már láttuk, hogy ez nem lehetséges. Tehát a feltételezett hattagú D -sorozatban az

$$1, 2, 9, 10$$

szerepelnének. De ekkor máris nem szerepelhet a sorozatban a 3 (az 1, 2, 3 miatt) továbbá az 5 (1, 5, 9 miatt), azután a 6 (2, 6, 10 miatt) és végül 8 (8, 9, 10 miatt); így, mint egyetlen lehetőség, marad az

$$1, 2, 4, 7, 9, 10$$

sorozat, ami nyilván nem D -sorozat, az 1, 4, 7 számok miatt és így tényleg

$$F(10) = 5.$$

Tekintsük $F(12)$ -t. Ha $F(12) \geq 7$ volna, akkor az előbbi gondolatmenet megismétlésével adódik, hogy

$$1, 2, 11, 12$$

szükségképp a sorozat tagjai volnának. De ekkor már sorozatunkban nem szerepelhetne a 3 (1, 2, 3 miatt), a 6 (1, 6, 11 miatt), a 7 (2, 7, 12 miatt) és a 10 (10, 11, 12 miatt). Viszont ha a 4 nem lépne fel a sorozatban, akkor a sorozat csupán az

$$1, 2, 5, 8, 9, 11, 12$$

sorozat lehetne, ami azonban 1, 5, 9 miatt nem D -sorozat. Hasonlóképpen a 9-nek a sorozatban fel kell lépnie, mert különben sorozatunk csupán az

$$1, 2, 4, 5, 8, 11, 12$$

sorozat lehetne, ami megint nem D -sorozat 2, 5, 8 miatt. De ekkor a sorozat tartalmazza tehát az

$$1, 2, 4, 9, 11, 12$$

számokat és, mint kipróbálással rögtön látható, ezekhez nem lehet 12 alatt oly hetediket találni, hogy ezek egy D -sorozatot alkossanak. Azaz $F(12) \leq 6$; mivel

$$1, 2, 4, 9, 11, 12$$

D -sorozat, tehát $F(12) \geq 6$ és így

$$(34) \quad F(12) = 6.$$

Az volna várható, hogy $F(14) = 7$. De az

$$1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14$$

sorozat nyilván D -sorozat; azaz $F(14) \geq 8$. Ha viszont $F(14) \geq 9$ volna, akkor mivel az ezt realizáló sorozatban legfeljebb két elem lehetne nagyobb 12-nél, így $F(12) \geq 7$ volna, ami előbbieket szerint nem igaz. Tehát

$$(35) \quad F(14) = 8,$$

azaz $N = 7$ -re a (27) alatti egyenlőtlenség nem áll! Viszont a további esetek vizsgálata könnyebben lesz eszközölhető egy további egyszerű észrevétellel. Tekintsük $F(m+n)$ -et és legyen

$$1 \leq g_1 < g_2 < \dots < g_{F(m+n)} \leq m+n$$

egy ilyen D -sorozat. Vegyük külön azokat a tagokat, melyeknek értéke legfeljebb m és azokat, melyek m -nél nagyobbak, de $m+n$ -nél nem nagyobbak. Az elsőbe tartozó elemek száma legfeljebb $F(m)$, mert különben már m alatt volna a sorozatban a (20) egyenletnek egy megoldása. A második kategóriába tartozó elemek mindegyikéből m -et levonva, adódik egy olyan D -sorozat, melynek elemei nem nagyobbak, mint n , tehát az e részbe eső elemek száma (30) alapján legfeljebb $F(n)$, azaz

$$(36) \quad F(m+n) \leq F(m) + F(n).$$

Ez a kívánt egyszerű észrevétel. Ebből

$$(37) \quad \begin{aligned} F(16) &\leq F(8) + F(8) = 8 \\ F(18) &\leq F(10) + F(8) = 9 \\ F(20) &\leq F(12) + F(8) = 10 \\ F(22) &\leq F(12) + F(10) = 11 \end{aligned}$$

és most térhetünk csak rá az indukcióra. Tegyük fel, hogy m oly egész, melynek értéke legalább 12 és tegyük fel, hogy a tétel igazolva van, ha

$$(38) \quad 8 \leq N < m$$

és legyen $N = m$. Ekkor (36)-ból

$$(39) \quad F(2m) \leq F(8) + F(2m-8) = 4 + F(2m-8)$$

De $m \leq 12$ miatt

$$2m - 8 \geq 16,$$

azaz az indukciós feltevés alkalmazható $F(2m-8)$ -ra, és így

$$F(2m-8) \leq m-4.$$

Tehát (39)-ből

$$F(2m) \leq 4 + (m-4) = m,$$

azaz a (27) alatti egyenlőtlenség $N = m$ -re is igazolva van.

Az $F(m)$ értékei egy darabig explicit megadhatók. Így

$$F(8) = 4$$

$$F(9) = F(10) = 5$$

$$F(11) = F(12) = 6$$

$$F(13) = 7$$

$$F(14) = F(15) = F(16) = F(17) = F(18) = F(19) = F(20) = 8$$

$$F(21) = F(22) = F(23) = 9.$$

Ezek segítségével előbbihez hasonló módon kimutatható, hogy tetszőleges kis pozitív ε mellett, ha csak N ε -tól függően elég nagy, akkor

$$F(N) < \left(\frac{3}{8} + \varepsilon\right) N.$$

Ennek bizonyítását itt nem részletezzük. Igen valószínű – ellentétben az előbbi feladattal – hogy minden végtelen D -sorozat felső sűrűsége kisebb bármily kis pozitív számnál, de e sejtés mindmáig bebizonyítatlan.³

Az előbbieken láttuk egész számok sorozatainak két típusát. Mindkettő tárgyalásában felhasznált módszerek különbözők voltak és az eredmények is. Már ezek is sejtetik, hogy ilyen számelméleti tulajdonságokkal értelmezett sorozatok vizsgálatára egységes módszer nem igen remélhető, ezek vizsgálata mindig új nehézséggel járó, érdekes feladat. Ha ezt sikerült ezen előadással valamelyest is érzékeltetnem, akkor célokat értem.

³E sejtést újabban bebizonyította *C. Roth* angol matematikus.