

Alábbiakban közöljük a kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai

1. feladat: Számítsuk ki $(x + y + z)^2$ értékét, ha

$$2x(y + z) = 1 + yz, \quad \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad x + y + \frac{1}{z} = 0.$$

I. megoldás: A változók egyike sem lehet 0, így a törtek eltávolíthatók és a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$2xy + 2xz - yz = 1, \quad 3xy + 2xz - yz = 0, \quad xz + yz = -1.$$

Ez elsőfokú egyenletrendszer, ha xy , xz , yz -t tekintjük ismeretlennek. A második egyenletet levonva az elsőből, majd az egymásutáni egyenleteket 3, -2, 1-gyel, végül pedig 3, -2, -2-vel szorozva és összeadva kapjuk sorra, hogy

$$xy = -1, \quad xz = \frac{2}{3}, \quad yz = -\frac{5}{3}.$$

Innen

$$x^2 = \frac{xy \cdot xz}{yz} = \frac{2}{5}, \quad y^2 = \frac{xy \cdot xy}{xz} = \frac{5}{2}, \quad z^2 = \frac{xz \cdot yz}{xy} = \frac{10}{9}.$$

Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} (x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{5}{2} + \frac{10}{9} + 2\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{90}. \end{aligned}$$

II. megoldás: A harmadik egyenletből $x + y$ értékét behelyettesítve

$$(x + y + z)^2 = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2,$$

így elég z^2 értékét meghatároznunk. Az egyenleteknek az előző megoldásban szereplő alakját használva adjuk, össze az első és utolsó egyenletet:

$$2xy + 3xz = 0, \quad y = -\frac{3}{2}z.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{2}xz + 2xz + \frac{3}{2}z^2 = 0, \quad \text{innen} \quad x = \frac{3}{5}z.$$

A nyert értékeket az első egyenletbe helyettesítve

$$-\frac{9}{5}z^2 + \frac{6}{5}z^2 + \frac{3}{2}z^2 = 1, \quad z^2 = \frac{10}{9},$$

tehát

$$(x + y + z)^2 = \frac{10}{9} + \frac{9}{10} - 2 = \frac{1}{90}.$$

2. feladat: Melyik az a legkisebb 4-gyel végződő természetes szám, melynek utolsó jegyét a szám elé írva, az eredeti szám négyszeresét kapjuk?

I. megoldás: Jelöljük a keresett szám ismeretlen számjegyeit x_1, x_2, \dots, x_n -nel. Ekkor a feladat olyan szám keresését kívánja, melyre

$$4 \cdot x_1x_2 \dots x_n4 = 4x_1x_2 \dots x_n.$$

Itt az egymásutáni betűk egy szám 10-es számrendszerbeli alakjának számjegyeit jelentik, a szorzás jelét mindig kiírjuk. A baloldal utolsó jegyét beszorozva 4-gyel ($4 \cdot 4 = 16$) adódik, hogy $x_n = 6$; ezt a baloldalon beírva folytathatjuk a szorzást és kapjuk, hogy $4 \cdot 6 = 24$, $24 + 1 = 25$ és így $x_{n-1} = 5$. Hasonlóan folytatva tovább sorra a 2, 0, 1 jegyeket kapjuk. Utóbbit 4-gyel szorozva 4-et kapunk, és nem marad továbbviendő egység, így kapjuk, hogy

$$4 \cdot 102564 = 410256.$$

Nem kell az eljárást a 4-es jegynél befejezni, ekkor olyan számokhoz jutunk, melyek az 102564 számjegysorozat többszöri megismétlésével keletkeznek. Ezek mind rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal és az eljárásból belátható, hogy csak ezek a számok felelnek meg.

Lényegében ugyanígy adódik az eredmény akkor is, ha a jobboldali szám osztása révén határozzuk meg sorra a számjegyeket x_1 -től kezdve.

II. megoldás: Legyen a 4-es előtti jegyekből álló szám x és legyen n jegyű. Ekkor az adott szám $10x + 4$. A 4-es előre téve $4 \cdot 10^n$ -t fog jelenteni s ezt a számot követi az x szám. Így a feladat olyan x és n természetes számok keresését kívánja, amelyekre

$$4(10x + 4) = 4 \cdot 10^n + x, \quad 39x = 4(10^n - 4).$$

A feladat tehát olyan n egész szám keresését kívánja, melyre $4(10^n - 4)$ osztható $39 = 3 \cdot 13$ -mal. Mivel

$$10^n - 4 = (10^n - 1) - 3 = 99 \dots 9 - 3$$

osztható 3-mal, így csak a 13-mal való oszthatóságot kell biztosítani, és mivel 4 relatív prím a 13-hoz, így csak $10^n - 4$ lehet 13-mal osztható. $10 - 4$ és $10^2 - 4$ nem osztható vele, tehát $n > 2$. Ez esetben

$$10^n - 4 = 100 \cdot 10^{n-2} - 4 = 4 \cdot (25 \cdot 10^{n-2} - 1) = 4[26 \cdot 10^{n-2} - (10^{n-2} + 1)].$$

Itt a 4 relatív prím a 13-hoz, 26 osztható vele, tehát a $10^{n-2} + 1$ -nek kell 13-mal oszthatónak lennie. Tudjuk, hogy 1001 osztható 13-mal, így $n - 2 = 3$, $n = 5$ a legkisebb kitevő, amelyik megfelel a feltételnek.

$$x = \frac{4 \cdot (10^5 - 4)}{39} = 10\,256,$$

a keresett szám tehát

$$102\,564.$$

Megjegyzés: 1. A $10^m + 1$ kifejezés ($n - 2$ helyett m -et írtunk) mindig osztható 13-mal, ha m a 3-nak páratlan többszöröse, mert ha $m = 3(2k + 1)$, akkor

$$\begin{aligned} 10^m + 1 &= (10^3)^{2k+1} + 1 = \\ &= (10^3 + 1)(10^{3 \cdot 2k} - 10^{3(2k-1)} + 10^{3(2k-2)} + \dots - 10^3 + 1) \end{aligned}$$

és $10^3 + 1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ha viszont $m = 3(2k + 1) + r$, $r = 1, 2, 3, 4$ vagy 5, akkor

$$10^m + 1 = (10^{3(2k+1)+r} + 10^r) - (10^r - 1) = 10^r(10^{3(2k+1)} + 1) - (10^r - 1).$$

Itt az első tag osztható 13-mal, a második viszont nem, mert $9, 99 = 9 \cdot 11, 999 = 9 \cdot 111 = 9 \cdot 3 \cdot 37, 9999 = 9 \cdot 1001 + 990$ és $99999 = 99 \cdot 1001 + 900$; és itt egyik tényező sem osztható 13-mal, ill. az első tag osztható vele, a második azonban nem, tehát ($m = n - 2$ -t visszaírva) a felírt egyenlet összes megoldásai

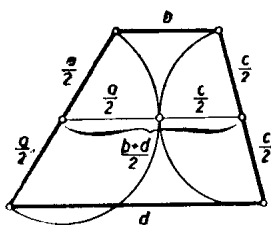
$$x = \frac{4(10^{6k+5} - 4)}{39}, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Könnyen látható, hogy ezek éppen az előző megoldásban említett alakú számok.

2. Kérdés, nem csak véletlen-e, hogy találtunk a feltételnek megfelelő számot. Erre csak azt jegyezzük meg, hogy az utolsó feladatnak sincs mindig megoldása. *Fermat* egy nevezetes számelméleti tételéből, illetőleg annak *Eulertől* származó általánosításából következik, hogy olyan m kitevő minden a egész számhoz van, amelyre $10^m - 1$ osztható a -val, ha a páratlan és nem osztható 5-tel; ezzel szemben $10^m + 1$ pl. 3-mal nem lehet osztható, mert $10^m + 1 = (10^m - 1) + 2$, ami 3-mal osztva 2-t ad maradékul, mert az első tag osztható 3-mal, bármilyen természetes szám is m .

3. feladat: *Bizonyítandó, hogy trapézba akkor és csak akkor írható az oldalakat érintő kör, ha szárak, mint átmérők fölé írt körök érintkeznek.*

I. megoldás: a) Tegyük fel, hogy a szárak fölé rajzolt körök érintkeznek. (1. ábra)

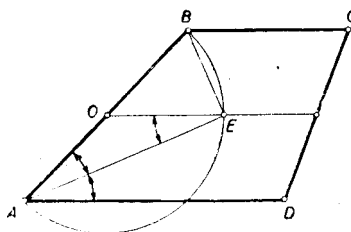


1. ábra

Ekkor a körök centrálisának hossza a sugarak összege, vagyis a szárak összegének a fele. Másrészt viszont a centrális éppen a trapéz középvonala, tehát hossza a párhuzamos oldalak összhosszának a fele. A feltételnek megfelelő trapézban tehát a szemközti oldalpárok összhossza megegyezik és tudjuk, hogy ha ez egy konvex négyszögre teljesül, akkor abba az oldalakat érintő kör írható. Tehát a feltétel elégséges.

b) Ha a trapézba az oldalakat érintő kör írható, akkor tudjuk, hogy a szemközti oldalpárok összege megegyezik s így a középvonal, melynek hossza a párhuzamos oldalak számtani közepe, egyben a szárak felének összegével is egyenlő s így a szárak mint átmérők fölé rajzolt körök közös pontban metszik a centrálisat. De ha két körnek a centrálisukon van közös pontja, akkor e pontban érintkeznek. Tehát a feltétel szükséges is. Ezzel igazoltuk a bizonyítandó állítást.

II. megoldás: Tetszés szerinti $ABCD$ trapéz ($BC \parallel AD$) AB szára fölé rajzoljunk félkört. Messe ez a középvonalat E -ben (2. ábra).



2. ábra

Ekkor E -n mennek át az A és B csúcsból húzott szögfelezők. Valóban, a félkör középpontját O -val jelölve $AOE\Delta$, egyenlő szárú s így $OAE\angle = OEA\angle$, mivel pedig a középvonal párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, így $OEA\angle = EAD\angle$, tehát AE felezi az A -nál lévő szöget. Hasonlóan látható, hogy BE szögfelező.

A trapézba akkor és csakis akkor írható kör, ha a négy szögfelező egy ponton megy keresztül, tehát akkor és csakis akkor, ha a szárak fölé rajzolt köröknek közös pontja van a középvonalon, tehát ha e körök érintkeznek.

Egyben azt is nyertük, hogy a körök érintkezési pontja a beírt kör középpontját adja.

Megjegyzés. A versenyzők legnagyobb része csak a feladat egyik felét bizonyította be, mert nem volt tisztában azzal, hogy az »akkor és csakis akkor« azt jelenti, hogy be kell bizonyítani egyrészt, hogy a feltétel *elégséges* (»akkor«) és másrészt, hogy a feltétel egyszersmind *szükséges* is (»csakis akkor«), vagyis azt, hogy a tétel megfordítható. Hogy ez nincs mindig így – tehát bizonyításra szorul – ezt a következő két igen egyszerű példa világítja meg. »Ha egy szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel. Itt az »akkor« nem toldható meg »csakis akkor«-ral, mert az 5-re végződés *elégséges* feltétel ugyan, de *nem szükséges*, hiszen a 0-ra végződő számok is oszthatók 5-tel. Viszont a következő állításban: »Egy szám *csakis akkor* osztható 6-tal, ha páros«, nem írhatunk a »csakis akkor« elé »akkor«-t, mert a szám páros volta ugyan *szükséges* feltétel, de *nem elégséges*, mert hiszen sok páros szám nem osztható 6-tal. Tehát a fenti két állítás egyike sem fordítható meg. (Ugyanis nem mondhatjuk: »Az 5-re, végződő számok oszthatók 5-tel és fordítva, ha egy-egy szám osztható 5-tel, akkor 5-re végződik.« Hasonlóképpen hamis: »Minden 6-tal osztható szám páros és fordítva, minden páros szám osztható 6-tal.«)

A II. forduló feladatai

1. feladat: Meghatározandó az x, y, z, u, v számjegyek értéke úgy, hogy a tízes számrendszerben felírt $x61y064zuv$ szám osztható legyen 61875 – tel.

I. megoldás: Bontsuk törzstényezőkre az osztót:

$$61875 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11 = 9 \cdot 11 \cdot 625.$$

Mivel itt az egyes tényezők páronként relatív primek, azért ahhoz, hogy a keresett szám e szorzattal osztható legyen szükséges és egyben elegendő is, hogy az egyes tényezők külön maradék nélkül meg legyenek benne.

625-tel azok és csak azok a számok oszthatók, amelyeknek utolsó 4 jegyéből álló szám is osztható 625-tel. (L. »K. M. L.« 1953. márciusi számában a 88. oldalon a 70. sz. gyakorlatot.) 625-nek 4000 és 4999 közt csak egy többszöröse van:

$$7 \cdot 625 = 4375, \quad \text{tehát} \quad 4zuv = 4375.$$

9-cel osztva minden szám ugyanazt a maradékot adja, mint a számjegyeinek összege, tehát kell, hogy

$$x + 6 + 1 + y + 0 + 6 + 4 + 3 + 7 + 5 = x + y + 32 = 9m.$$

11-gyel osztva minden szám ugyanannyi maradékot ad, mint az a szám, amelyet kapunk, ha az egyesektől kezdve, minden második számjegyet összeadunk és ebből az összegből levonjuk a kihagyott számjegyek összegét (L. »K. M. L.« 1953. márciusi számában a 81. oldalon a 475. sz. feladatot.) Jelen esetben

$$\begin{aligned} (5 + 3 + 6 + y + 6) - (7 + 4 + 0 + 1 + x) &= (20 + y) - (12 + x) = \\ &= 8 + y - x = 11n. \end{aligned}$$

Tehát

$$x + y = 9m - 32 \quad \text{és} \quad -x + y = 11n - 8.$$

Itt x és y egyjegyű számok, tehát

$$0 \leq x + y \leq 18, \quad -9 \leq -x + y \leq 9,$$

és így $m = 4$ vagy 5 , $n = 0$ vagy 1 . Mivel pedig két egész szám összege és különbsége közül nem lehet az egyik páratlan, a másik páros, így $m = 4$, $n = 0$ vagy $m = 5$, $n = 1$ felelhet meg. Első esetben y -ra negatív szám adódnék, tehát csak $x + y = 13$ és $-x + y = 3$ lehetséges, ahonnan $x = 5$ és $y = 8$.

A keresett szám tehát

$$5\,618\,064\,375,$$

és ennek valóban oszthatónak kell lennie $61\,875$ -tel, mert az utolsó 3 jegy választása folytán osztható 625 -tel, x és y megválasztása folytán pedig osztható 9 -cel és 11 -gyel.

II. megoldás: Ha a szám osztható $61\,875$ -tel, akkor pl. a 16 -szorososa osztható $16 \cdot 61\,875 = 990\,000$ -rel, tehát minden esetre négy 0 -val végződik. A kérdéses szám utolsó négy számjegye $4 \cdot 16 = 64$ folytán megegyezik a

$$4000 + 16 \cdot zuv$$

számt utolsó négy jegyével. Mivel $16 \cdot zuv < 16\,000$, tehát csak úgy kaphatunk négy 0 -ra végződő számot, ha

$$16 \cdot zuv = 6000, \quad \text{vagyis} \quad zuv = 375.$$

A keresett szám 16 -szorosának ezenkívül még 99 -cel kell oszthatónak lennie. Mivel 16 és 99 relatív prímek, ez csak akkor következik be, ha az eredeti szám is osztható 99 -cel. 99 -re viszont egyszerű oszthatósági szabály található. (L. »K. M. L.« 1953. áprilisi számában a 118. oldalon a 74. sz. gyakorlatot.) Mivel

$$\begin{aligned} 100 &= 99 + 1, & 10\,000 &= 99 \cdot 101 + 1, & 1\,000\,000 &= 99 \cdot 10\,101 + 1, \\ 100\,000\,000 &= 99 \cdot 1\,010\,101 + 1, \dots \end{aligned}$$

ezért a keresett szám ugyanannyi maradékot ad 99 -cel osztva, mint a következő kétjegyű számok összege:

$$x6 + 1y + 06 + 43 + 75 = xy + 140.$$

Ez a szám 140 -nél nagyobb, 240 -nél kisebb, tehát csak úgy lehet 99 -cel osztható, ha $2 \cdot 99 = 198$ -cal egyenlő, mely esetben

$$xy = 58, \quad \text{tehát} \quad x = 5, \quad y = 8,$$

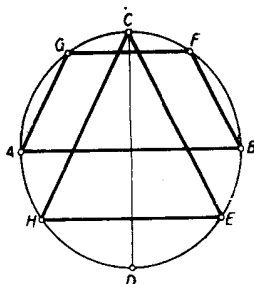
és így a keresett szám

$$5\,618\,064\,375,$$

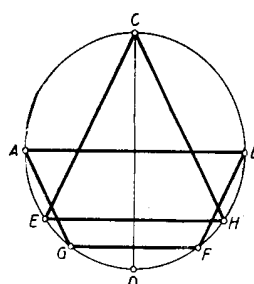
és ez valóban osztható $61\,875$ -tel, mert osztható 99 -cel, tehát a 16 -szorososa is osztható vele, és a 16 -szorososa ezenkívül négy 0 -val végződik. Tehát $990\,000$ -rel osztható a szám 16 -szorososa és így az eredeti mindenestre osztható ennek 16 -odával, $61\,875$ -tel.

2. feladat: Egy kör AB és CD átmérői merőlegesek egymásra, a CE húr párhuzamos a BF húrral, E ill. F tükörképei CD -re vonatkozóan H ill. G . Bizonyítandó, hogy az $ABFG$ trapéz területe egyenlő CEH háromszög területével.

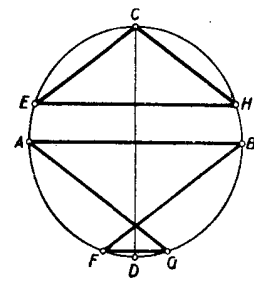
A leírás különböző ábrákhoz vezethet (1., 2. és 3. ábra), aszerint, hogy hol vesszük fel az E pontot. Az 1. ábrán a BD a 2.-on DA negyedkörön vettük az E pontot. A két ábrán, csak a trapéz helyzete tükrös egymáshoz képest az AB átmérőre vonatkozóan. Ez a területekre nincs befolyással. Ha ellenben E átjut az AC ívre (3. ábra), akkor az $ABFG$ négyszög hurkolt négyszög két párhuzamos oldallal: »hurkolt trapéz«.



1. ábra



2. ábra

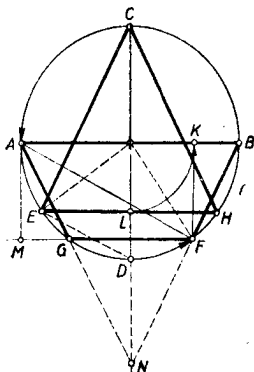


3. ábra

Az állítás erre az esetre is igaz, ha a hurkolt trapéz területét megfelelően értelmezzük, de hogy egyáltalán mit értsünk egy önmagát metsző négyszög területén, az eleve nem világos és ezért hibáztható is a feladat megfogalmazása.

Az $ABGF$ trapéz területét venni, vagy akár a két háromszög területének összegét, ez a feladat szempontjából nem megfelelő, hiszen a keletkezett kettős háromszögből az AB oldalhoz csatlakozó hasonló a CEH háromszöghöz, de már egymagában is nagyobb nála, mert $AB > EH$. Hogy a terület milyen értelmezése mellett érvényes az állítás ebben az esetben is, az bizonyítás közben fog adódni. Ha E a CB ívre kerül, akkor lényegesen új esetet nem kapunk, csak a »hurkolt trapéz« kerül ismét az AB átmérő másik partjára. Térjünk ezután a feladat megoldására.

I. megoldás: Alakítsuk először a trapézt téglalappá úgy, hogy az F -ből AB -re bocsátott FK merőlegessel elvágott BFK háromszöget a GA oldalhoz illesztjük (4. ábra).



4. ábra

Az így keletkezett $AMFK$ téglalapot az AF átlóval két egyenlő részre osztjuk, és megmutatjuk, hogy a keletkezett $AFK\Delta$ egybevágó a CEH háromszög felét kitevő CEL háromszöggel, ahol L az EH húr középpontja (mely nyilván CD -re esik). Valóban forgassuk el utóbbit a kör középpontja körül az óra járásával ellenkező irányban 90° -kal. Ekkor C átmegy A -ba és mivel D az elforgatás után B -be kerül, így L az AB átmérőre fog kerülni. Azt kell csak belátnunk, hogy az E pont F -be megy át, ez pedig teljesül, mert a BC és EF ívet párhuzamos hurok metszik ki a körből, tehát az EF ív is negyedkör.

A bizonyítás lényegtelen változtatással alkalmazható arra az esetre is, ha E a BD negyedkörtön van (a következő megoldásból látható lesz, hogy hogyan), nem világos azonban, hogy hogyan vihető át a hurkolt esetre. Ez sokkal könnyebben lesz látható a következő megoldásból, amely szoros rokonságban van az elsővel.

II. megoldás: Az előbbi jelöléseket használva (4. ábra) nyilvánvaló, hogy AK a trapéz középvonalával egyenlő, tehát a trapéz ill. háromszög t_1 ill. t_2 területe

$$t_1 = AK \cdot FK, \quad t_2 = \frac{CL \cdot EH}{2} = CL \cdot EL.$$

Megmutatjuk, hogy

$$FK = EL \quad \text{és} \quad AK = CL,$$

ill. utóbbi helyett, hogy $BK = DL$. Mindkét egyenlőség következik abból, hogy

$$BFK\Delta \cong DEL\Delta.$$

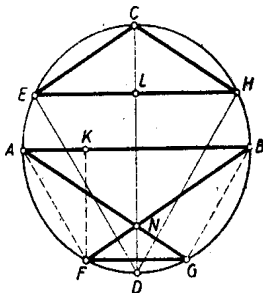
Forgassuk el az utóbbi háromszöget 90° -kal az óra járásával ellenkező irányban a kör középpontja körül. Ekkor D átmegy B -be, EL pedig a B -hez húzott sugárra merőleges helyzetbe kerül, E pedig átmegy F -be, amint azt az I. megoldásban láttuk. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés: A bizonyítás »hurkolt trapéz« (5. ábra) esetén is azt adja, hogy

$$EL = FK, \quad DL = BK, \quad \text{amiből} \quad CL = AK,$$

tehát

$$EL \cdot CL = FK \cdot AK = FK \cdot \frac{AB - FG}{2} = \frac{FK \cdot AB}{2} - \frac{FK \cdot FG}{2}.$$



5. ábra

Baloldalt ismét a $CEH\triangle$ területe áll, a jobboldal viszont felfogható az AFB és AFG háromszögek területei különbségének. Ebből a különbségből kiesik a két háromszög közös részének a területe és marad a »hurkolt trapéz« nagyobb és kisebb háromszöge területének *különbsége*. A hurkolt esetben tehát e területkülönbség egyezik meg a CEH háromszög területével.

Számítás nélkül is bebizonyíthatjuk ezt az eredményt. Ugyanis a közönséges trapézra fentebb már bebizonyított tétel alapján az 5. ábrában a $DEH\triangle$ területe egyenlő az $ABGF$ közönséges trapéz területével, továbbá ugyancsak az előbbieket alapján $ABF\triangle \cong CDE\triangle \cong CDH\triangle \cong BGA\triangle$.

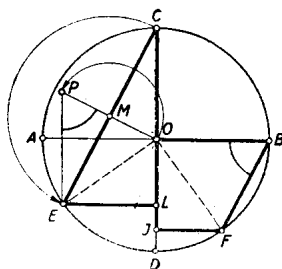
Tehát (területekről beszélve)

$$\begin{aligned} CEH &= CEDH - DEH = CEDH - ABGF = \\ &= CEDH - (ABF + ABG - ABN + FGN) = \\ &= CDE + CDH - ABF - ABG + ABN - FGN = ABN - FGN. \end{aligned}$$

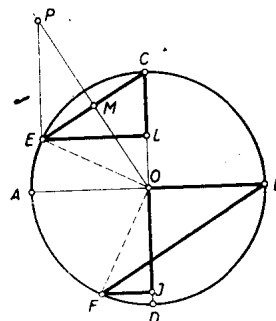
Könnyű a feladatot úgy fogalmazni, hogy a kettősség ne is lépjen fel. (L. 4. és 5. ábrát). Ha a BF és AG egyenesek metszéspontját mindenkor N -el jelöljük, akkor a CEH háromszög területe – minden esetben – az ABN és GFN háromszögek területének különbségével egyenlő.

A III. osztályosok más szempontból is érthetőnek fogják tartani a nyert eredményt. A koordináta-geometriában ugyanis kiderült, bizonyos szempontból előnyös lehet a területet előjeles mennyiségnek tekinteni, oly módon, hogy minden idomhoz megadjuk, hogy hogyan járjuk körül a kerületét (sokszögeknél ez például a csúcsok sorrendjével már meg van adva) és akkor azon idomok területét, melyek körüljárásban a jobbkezünk felé esnek, ellenkező előjelűnek nevezzük, mint amelyek körüljárásakor balról fekszenek. (Bármelyik lehet pozitív, de a másik minden esetben negatív lesz.) Ilyen értelmezés mellett hurkolt négyszög területéül mindig azon két háromszög területének különbsége adódik, melyekből a hurkolt négyszög áll.

III. megoldás: Mivel mindkét szóban forgó idom tükrös a CD átmérőre, mint tengelyre, így elég azt megmutatni, hogy a háromszög fele és a trapéz fele egyenlő területű, tehát ha az FG és EH húrok felezőpontjai J és L (6. ábra), akkor azt kell megmutatnunk, hogy a CEL háromszög és a $BFJO$ trapéz egyenlő területű.



6. ábra



7. ábra

Húzzuk meg az EC húr OM felező merőlegesét és forgassuk a CMO háromszöget az M pont körül az EM szakasz mellé. Az így keletkezett $ELOP$ derékszögű trapézban

$$\sphericalangle EPO = \sphericalangle OBF$$

mint merőlegesszerű szögek, mert PO merőleges a CE -vel párhuzamos BF húrra is. EP és OB , a trapézok hosszabb párhuzamos oldalai sugárnyi hosszúságúak és ugyancsak sugárnyi hosszúságú az EO ill. OF átló is. Így a $BFJO$ trapéz egybevágó, tehát egyenlő területű is, a $POLE$ trapézsal, tehát egyenlő területű a CEL háromszöggel is.

A hurkolt esetben is igaz, hogy az CEO háromszög átalakítható a PEO háromszöggé (7. ábra) és utóbbi egybevágó a BOF háromszöggel. Viszont előbbiből most el kell hagyni az ELO háromszöget, hogy a CEL háromszöget kapjuk. Ennek megfelelően BFO -ból OJF -fel egyenlő területet kell elvonnunk. A közös rész elhagyása után a hurkolt négyszög OB -hez csatlakozó nagyobb háromszöge marad meg. Ebből kell még az FJ -hez csatlakozó kisebb háromszöget elvenni, hogy CEL -lel egyenlő területet kapjunk.

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

és n pozitív páratlan szám, akkor

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

I. megoldás: Vigyük át az első egyenlet baloldaláról az utolsó tagot a jobboldalra:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}, \quad \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}.$$

Redukáljuk az egyenletet 0-ra és emeljük ki $(a+b)$ -t:

$$\begin{aligned} (a+b) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{c(a+b+c)} \right) &= \frac{(a+b)[ab + (a+b)c + c^2]}{abc(a+b+c)} = \\ &= \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc(a+b+c)} = 0. \end{aligned}$$

Ez csak úgy lehet 0, ha a számláló 0. Teljesen hasonlóan a második egyenlet

$$\frac{(a^n + b^n)(b^n + c^n)(c^n + a^n)}{a^n b^n c^n (a^n + b^n + c^n)} = 0$$

alakba írható. Mivel páratlan pozitív egész n -re

$$u^n + v^n = (u+v)(u^{n-1} - u^{n-2}v + \dots - uv^{n-2} + v^{n-1}),$$

azért a számláló osztható az

$$(a+b)(b+c)(c+a)$$

szorzattal, így a második egyenlőség is teljesül, ha az első teljesül.

II. megoldás: Az első egyenletet átalakítva

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}, \quad \text{vagyis} \quad (a+b+c)(ab+bc+ca) = abc.$$

Írjunk fel egy olyan egyenletet, melynek gyökei a , b és c :

$$\begin{aligned} 0 &= (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - (a+b+c)(ab+bc+ca) = \\ &= x^2[x - (a+b+c)] + (ab+bc+ca)[x - (a+b+c)] = \\ &= [x - (a+b+c)][x^2 + (ab+bc+ca)]. \end{aligned}$$

Az első alakról látható, hogy ez csak akkor teljesülhet, ha x megegyezik a , b , c valamelyikével, az utolsóból viszont következik, hogy a kifejezés eltűnik, ha $x = a+b+c$, tehát utóbbinak meg kell egyeznie az előbbieket valamelyikével pl.

$$a+b+c = a, \quad c = -b,$$

s így páratlan egész n -re

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} - \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n + b^n + (-b)^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

is teljesül.