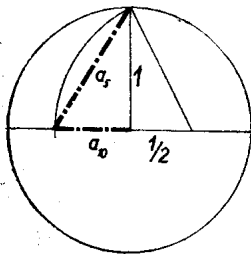


A II. gimn. matematikakönyv 146. oldalán utalás történik arra, hogy a szabályos tízszög szerkesztésében fellépő körív húrja éppen az ugyanebbe a körbe írható szabályos ötszög egy oldala (1. ábra). Ezt fogjuk igazolni a következőkben.



1. ábra

Bizonyításunkban egységsugarú kört használunk; ez nem megy az általánosság rovására, mert ha a kör sugara r egység volna, a bele rajzolt „húrok” és egyéb ugyanolyan módon szerkesztett szakaszok is mind r -szeresükre növekednének (csökkennének) a hasonlóság folytán, ennél fogva arányuk változatlan marad.

Tudnunk kell, hogy az egységsugarú körbe rajzolható szabályos tízszög a_{10} oldala eleget tesz az

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1)$$

másodfokú egyenletnek. (L. a II. gimn. matematikakönyv 144. oldalán. Ott ilyen alakban fordul elő:

$$R^2 = a(a + R).$$

Ha $R = 1$, és a helyett a_{10} -et írunk, akkor előbbi egyenletünkhöz jutunk.)

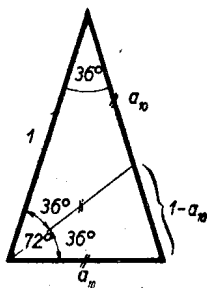
a_{10} értéke ebből az egyenletből ki is számítható:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

mert a negatív gyöknek, $-\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ -nek itt nem tudunk geometriai jelentést tulajdonítani.

A nem gimnazisták részére itt közöljük az a_{10} -re vonatkozó fenti egyenlet egy bizonyítását.

Tekintsük az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög egyik középponti háromszögét (2. ábra).



2. ábra

A két vonalkával áthúzott szakaszok – a szereplő háromszögek egyenlő szárú volta miatt – mind egyenlők a_{10} -zel. Az eredeti és az alsó kis háromszög hasonlósága miatt (szögeik megegyeznek):

$$(1 - a_{10}) : a_{10} = a_{10} : 1,$$

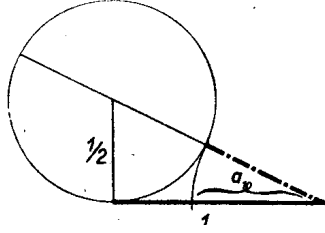
vagyis a_{10} az aranymetszés szerint osztott egységnyi sugar nagyobbik darabja.

A beltagok szorzata egyenlő a kültagok szorzatával:

$$a_{10}^2 = 1 - a_{10}, \quad \text{amiből} \quad 1 = a_{10}(a_{10} + 1),$$

vagyis megkaptuk a fenti másodfokú egyenletet.

Az egységtávolság aranymetszés szerinti osztását a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Az egységtávolság egyik végpontjában félegység sugarú érintőkört szerkesztünk az egységtávolsághoz. Ezen kör középpontján és az egységtávolság másik végpontján átmenő szelőn keletkező két metszet a_{10} és $a_{10} + 1$. Igazolás: Egy pontból húzott érintő (ábránkban az egységtávolság) mértani középarányos az ugyanabból a pontból húzott szelő két metszete között, vagyis

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1).$$

Látjuk, hogy a_{10} -et úgy kapjuk, hogy 1 és $1/2$ egységnyi befogókkal bíró derékszögű háromszög átfogójából kivonjuk a kisebbik befogót, az $1/2$ -et. Ez történik az a_{10} -nek szokásos szerkesztésénél is. (L. 1. ábrát.)

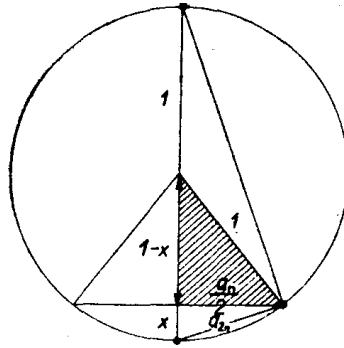
Visszatérve cikkünk tulajdonképpeni tárgyára, azt fogjuk bizonyítani, hogy az egységsugarú körbe szerkeszthető szabályos ötszög a_5 oldala és a szabályos tízszög a_{10} oldala között az

$$a_5^2 = 1 + a_{10}^2$$

összefüggés áll fenn. Ez nyilvánvalóan ugyanaz, mint amit először állítottunk, mert hiszen a szabályos tízszög szerkesztésével kapcsolatban említett húr olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói az egységnyi sugár és a_{10} , tehát ennek a húrnak a négyzete Pythagoras tétele értelmében $1 + a_{10}^2$ -tel egyenlő. Ha most sikerül kimutatnunk, hogy a_5 négyzete is ugyanennyi, akkor ezek, vagyis a szóbanforgó húr és a_5 maguk is egyenlők (hiszen mindketten pozitívok), ennél fogva a szóbanforgó húr csakugyan a szabályos ötszög egy oldala.

Állításunk igazolását kétféleképpen: elemi úton és trigonometria ismeretek felhasználásával is végezzük, hogy al-
kalom kínálkozzék a különböző módszerek összehasonlítására.

a) Az elemi geometriai eljárás során először is összefüggést állapítunk meg ugyanabba az egységnyi sugarú körbe szerkeszthető szabályos (konvex) n -szög és $2n$ -szög oldalának hosszúsága között. (4. ábra.).



4. ábra

A megvastagított csúcsú (Thales tétele szerint) derékszögű háromszögben mint az egyik befogó, mértani közepe az átfogónak (a kör átmérőjének) és az erre eső vetületének, amit x -szel jelöltünk. Eszerint:

$$a_{2n}^2 = 2x.$$

A bevonalkázott derékszögű háromszögre Pythagoras tételét alkalmazva:

$$(1 - x)^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 = 1,$$

$$\text{ebből } 1 - x = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}, \text{ illetőleg } 1 - x = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

x értékét $a_{2n}^2 = 2x$ egyenletünkbe írva:

$$a_{2n}^2 = 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}} \right) = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}.$$

Speciálisan, ha $n = 5$:

$$a_{10}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_5^2}$$

Ezt szeretnők a kívánt $a_5^2 = 1 + a_{10}^2$ alakra hozni. Felhasználjuk e célból, hogy a_{10} eleget tesz a cikkünk elején említett

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1)$$

egyenletnek. Ebből

$$a_{10}^2 = 1 - a_{10},$$

s ezt utolsó négyzetgyökös egyenletünkbe írva:

$$1 - a_{10} = 2 - \sqrt{4 - a_5^2}, \text{ azaz } \sqrt{4 - a_5^2} = 1 + a_{10}.$$

Távolítsuk el a négyzetgyököt:

$$4 - a_5^2 = 1 + 2a_{10} + a_{10}^2$$

Az itt még fölösleges $2a_{10}$ tagot ismét az

$$1 = a_{10}(a_{10} + 1) \text{ illetve } a_{10} = 1 - a_{10}^2$$

összefüggés alapján helyettesítjük megfelelővel:

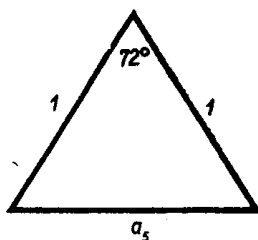
$$4 - a_5^2 = 1 + 2(1 - a_{10}^2) + a_{10}^2.$$

Ha utolsó egyenletünkben polinommal alakítunk, összevonás és rendezés után csakugyan a kívánt

$$a_5^2 = 1 + a_{10}^2$$

összefüggéshez jutunk.

b) A trigonometriai igazolásban az egységsugarú körbe írható szabályos ötszög egy középponti háromszögéből indulhatunk ki (5. ábra).

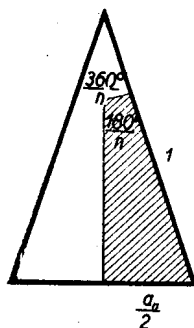


5. ábra

Írjuk fel erre a cosinus-tételt:

$$a_5^2 = 1 + 1 - 2 \cos 72^\circ = 1 + 1 - 2 \sin 18^\circ.$$

A szabályos n -szög egyik középponti háromszögét a csúcsonál lévő szög felezőjének meghúzásával két egybevágó derékszögű háromszögre osztjuk.



6. ábra

Ezek egyikéből (a 6. ábrán bevonalkáztuk) a szabályos n -szög oldala, a_n a következő módon számítható ki (A körülírt kör sugarát most is egységnyinek vesszük.):

$$\frac{a_n}{2} = \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ azaz } a_n = 2 \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Speciálisan, ha $n = 10$:

$$a_{10} = 2 \sin 18^\circ,$$

fentebbi egyenletünk ennél fogva így alakul:

$$a_5^2 = 1 + 1 - a_{10}.$$

De már láttuk (az elemi megoldás során), hogy

$$1 - a_{10} = a_{10}^2,$$

vagyis csakugyan

$$a_5^2 = 1 + a_{10}^2.$$

Említettük, hogy $a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ennek és utolsó egyenletünknek alapján most már a_5 értéke is kiszámítható.