

A RÁKOSI MÁTYÁS matematikai tanulmányi verseny, mely ebben az évben került először kiírásra és pedig a középiskolák III. év IV. osztályú tanulói részére, mind a mennyiséget, mind a minőséget tekintve felülmúlja a tavaly nagy sikerű Arany Dániel versenyt. Az I. fordulóra – mely ápr. 19-én az iskoláknál zajlott le – 219 iskola összesen 3114 tanulót nevezett, de mivel a benevezett iskolákon kívül is indult néhány iskola a résztvevők száma kb. 3150-re tehető. A beadott dolgozatok száma 2921 volt.

Az I. fordulón a következő 3 feladatot kellett a versenyzőknek 4 órán belül megoldani:

1. Legyen adva két egymásra merőleges egyenes és egy pont. A pont körül rajzoljunk kört tetszőszerinti sugárral, de úgy, hogy mind a két egyenest messe. E metszéspontokban emeljünk merőlegest az egyenesekre és keressük meg ezek metszéspontjait. Milyen vonalat írnak le a metszéspontok, ha a kör sugarát változtatjuk?

2. Egy üzem az ötéves terv első évében 6%-kal emeli évi termelését, a második évben pedig további 8%-kal. A további három év alatt évente ugyanannyi százalékkal akarják emelni a termelést, úgyhogy a termelésnek a terv egész folyamán elért emelkedése átlagos évi 10%-nak feleljen meg. Hány százalékkal kell emelni évente a termelést?

3. Egy egyenlő oldalú négyzetes gúla alapéle 26 cm, a szomszédos oldallapok 120° -os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

Tekintettel arra, hogy a közgazdasági középiskolákban koordináta geometriát nem tanulnak, az 1. feladat pótlására még egy szabványos példa számtani haladványra is ki volt tűzve. A két feladat között a versenyzők választhattak.

A döntő II. forduló az első fordulón elért eredmény alapján kiválasztott 281 versenyző közt folyt le május 18-án d. e. 10 órától d. u. 3-ig, mégpedig Budapesten (168 induló), Szegeden (25 induló), Debrecenben (15 induló – köztük egy II. osztályos versenyen kívül), Miskolcon (12 induló), Pécsen (15 induló), Veszprémben (16 induló), Győrött (17 induló) és Egerben (13 induló).

A döntőben a következő 3 feladat volt kitűzve:

1. Adva van a síkban A és B pont. Hol kell elhelyezni a síkban a C pontot, hogy a CA távolság 2,6-szerese legyen a CB távolságnak, és a BAC szög lehető legnagyobb legyen?

2. Egy vasútvonalon A helységből személyvonat indul C helységbe. Amikor a vonat B -n átfut, onnan egy tehervonat indul A felé. Amidőn pedig a tehervonat A -ba érkezik, egy gyorsvonat indul A -ból C felé, s ez éppen a C állomáson éri utol a korábban említett személyvonatot. A és B közt felúton egy diák megfigyeli, hogy a személyvonat áthaladása után 15 perc múlva futott át a tehervonat és újabb 11 perc elteltével a gyorsvonat. A -tól B 10 km-re van. Kérdés, hány km-re van B -től a C helység? (Feltesszük, hogy a vonatok egyenletes sebességgel haladnak.)

3. Bizonyítandó, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$$

A versenyzők túlnyomó része legalább egy feladatot jól oldott meg. 74 versenyző volt, aki vagy legalább 2 feladatot lényegében megoldott, vagy egyre szellemes megoldást adott. Ezek közül kiemelkedett 15 dolgozat (eltekinthető a versenyen kívül indult tanuló dolgozatától), melyek szerzői többé-kevésbé teljes megoldást adtak mindhárom feladatra, vagy 2 feladatnak adtak teljes megoldását, de valamelyik megoldásuk kiemelkedő. A minősítésre leginkább az első feladat adott módot. Ezt sokfelől próbálták megközelíteni a versenyzők, és különböző mértékben sikerült a megoldás lényegére rátapintaniuk.

A 15 dolgozat közül 3 találja meg a lényegre rámutató választ, ezek szerzői Kántor Sándor, Dömölki Bálint és Keresztély Sándor. Mindhárman megoldják a másik két feladatot is. Ezek közül is kiemelkedik Kántor Sándor dolgozata. Az első feladatnak két különböző módon adja megoldását és vázolja egy harmadik megoldási lehetőség menetét. A második feladatot egyenletekkel röviden, világosan megoldja, emellett ad egy egész elemi okoskodással történő megoldást is. A harmadik feladatnak ügyes, világos megoldását adja. Fogalmazása rövid, tömör. Világosan emeli ki a lényegét.

Dömölki és Keresztély dolgozata egyféle megoldást ad, mindegyik feladatra s nem mindenütt találja meg a legrövidebb utat, bár eljutnak mindegyik feladatnak a teljes megoldásához.

Az első feladatra legegyszerűbb megoldást Fehér János ad, ő azonban nem oldja meg a harmadik feladatot. A második feladatra Ádám András egyszerű grafikus megoldást ad, nem oldja meg az első feladatot. A harmadik feladat megoldásában Szekerka Pálnak van egy ügyes ötlete, amellyel a megoldást áttekinthetővé teszi, viszont az első feladatnál nem sikerül sokszori próbálkozás ellenére az észrevett geometriai viszonyokat bizonyítani.

A K. M. a bírálóbizottság véleményének meghallgatása után a következő döntést hozta:

1 díj (oklevél és 1000 Ft pénzjutalom):

KÁNTOR SÁNDOR (Debrecen, Ref. Koll. g. III. o. t.).

2 díj (oklevél és 500 Ft pénzjutalom):

DÖMÖLKI BÁLINT (Bp. XI., Apáczai Csere János g. III. o. t.),

KERESZTÉLY JÁNOS (Miskolc, Földes Ferenc g. III. o. t.).

I. dicséretben és nagyobb könyvjutalomban részesültek:

<i>Ádám András</i>	(Hajdúszoboszló, Irinyi János g. IV.)
<i>Bársony András</i>	(Nagykanizsa, Irányi Dániel g.)
<i>Durst Endre</i>	(Szolnok, Beloiannis gimn. IV.)
<i>Fehér János</i>	(Győr, Révai g.)
<i>Járfás László</i>	(Budapest, X., Széchenyi g.)
<i>Klopfer Ervin</i>	(Bp. VIII., Kohó- és gépipari techn. IV.)
<i>Nagy Tibor</i>	(Vác, Sztáron Sándor gimn.)
<i>Rédly Elemér</i>	(Pannonhalmi g. III.)
<i>Révész Pál</i>	(Bp. VII., Madách g. IV.)
<i>Szekerka Pál</i>	(Bp. VI., Kölcsey g. IV.)
<i>Villányi Ottó</i>	(Bp. IV. Könyves Kálmán g. IV.)
<i>Zalán János</i>	(Győr, Révai g.)

II. dicséretet és könyvjutalmat nyertek:

Adány László (Bp. X., I. László g.), *Adorján László* (Debrecen, Kohó- és gépipari techn. IV.), *Balázs Béla* (Bp. VII., Evang. g. III.), *Bán István* (Bp. V., Berzsényi gimn. IV.), *Bánkövi György* (Bp. XI., József Attila g. III.), *Beretvás Tamás* (Bp. V., Berzsényi g. III.), *Billes Ferenc* (Bp. XIV., 2. sz. vegyipari techn.), *Csom Gyula* (Sümeg, Korvin Ottó g. IV.), *Deák Gedeon* (Bp. V., 1. sz. textilipari techn. IV.), *Dékány Sándor* (Bp. XI., József Attila g. III.), *Egri György* (Bp. V., Eötvös gimn. IV.), *Fellegi Iván* (Bp. XIV., I. István g.), *Földvári György* (Bp. V., Eötvös g. IV.), *Frajka Zoltán* (Karcag, Gábor Áron g. III.), *Gersits Ferenc* (Bp. X., I. László g. III.), *Gönczi Anikó* (Bp. I., Szilágyi Erzsébet Ig. IV.), *Ivits Iván* (Bp. IX., Fáy g. IV.), *Halmos Lajos* (Bp. I., Fürst S. g. IV.), *Harsányi Ibohya* (Bp. XIX., Landler Jenő g.), *Hartl Aladár* (Eger, Dobó István g.), *Kelen Rudolf* (Bp. X., I. László g. IV.), *Kerepesi Károly* (Bp. XIV., 2. sz. vegyipari techn.), *Kiss Gábor* (Szeged, Radnóti g. IV.), *Kiss Lajos* (Debrecen, Csokonai g. III.), *Kollár Mihály* (Szarvas, Vajda Péter g. IV.), *Kovács István* (Bp. XI., József Attila g. IV.), *Kövér György* (Bp. IX., Ref. g. III.), *Lakósi László* (Keszthely, Vajda János g.), *Malatinszki Jenő* (Bp. XIV., Maxim Gorkij isk.), *Martin Sándor* (Szeged, Radnóti g. III.), *Markó László* (Bp. XVI., Corvin Mátyás g.), *Mina János* (Kiskunhalas, Sziládi Áron g. III.), *Mitsányi Attila* (Bp. XIV., Maxim Gorkij isk.), *Molnár Lóránt* (Bp. VIII., Fazekas g.), *Nagy Ferenc* (Szeged, Radnóti g. III.), *Nagy Lajos* (Aszód, Petőfi g.), *Németh László* (Gyula, Erkel Ferenc g. IV.), *Neogrády Dezső* (Keszthely, Vajda János g.), *Oláh Tibor* (Miskolc, Mikszáth g.), *Pataki György* (Bp. VII., Madách g. IV.), *Rockenbauer Magda* (Bp. X., I. László g. III.), *Schwirg József* (Bp. IX., 4. sz. Gépipari techn. III.), *Serf Egyed* (Bp. I., Fürst g. IV.), *Spiró János* (Bp. V., Berzsényi g. IV.), *Szakács Péter* (Bp. VI., 1. sz. Élelmiszeripari techn.), *Székely László* (Cegléd, Kossuth g.), *Szilárd Katalin* (Bp. VI., Kossuth Zsuzsa g. III.), *Szondy Tamás* (Bp. III., Árpád g.), *Telkes Zoltán* (Aszód, Petőfi g. III.), *Tölgyesi István* (Nyíregyháza, Kossuth g. IV.), *Turi István* (Battonya, Mikes Kelemen g.), *Varsányi Tamás* (Bp. VIII., Fazekas g. III.), *Zobor Ervin* (Nagykanizsa, Irányi Dániel g. III.).

Alábbiakban adjuk a kitűzött feladatok megoldásait.

Az I. forduló feladatai

1. feladat.

Megoldás: A körnek az egyenesekkel való metszés pontjai szimmetrikusak a pontból az egyenesekre bocsátott merőlegesekre nézve, tehát célszerű az utóbbi két egyenest koordináta-tengelynek választani, az adott pont lesz tehát az origó. Legyen a „függőleges” egyenes távolsága az Y tengelytől u , a „vízszintesé” az X -tengelytől v (u és v előjellel veendő). A kör sugara r nyilván nem legkisebb sem $|u|$ sem $|v|$ -nél. Az r sugarú kör által létesített 4 metszéspont: (x_1, v) , $(-x_1, v)$, (u, y_1) , $(u, -y_1)$ és e metszéspontokban emelt merőlegesek metszéspontjainak koordinátái: (x_1, y_1) , $(-x_1, y_1)$, $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, -y_1)$. Az előbbi 4 pont rajta van az origó körül húzott r sugarú körön, tehát koordinátái kielégítik a következő két egyenletet:

$$(1) \quad x_1^2 + v^2 = r^2$$

és

$$(2) \quad u^2 + y_1^2 = r^2$$

Ha r -et kiküszöböljük az által, hogy pl. (1)-ből kivonjuk (2)-t, az

$$x_1^2 - y_1^2 + v^2 - u^2 = 0,$$

vagyis

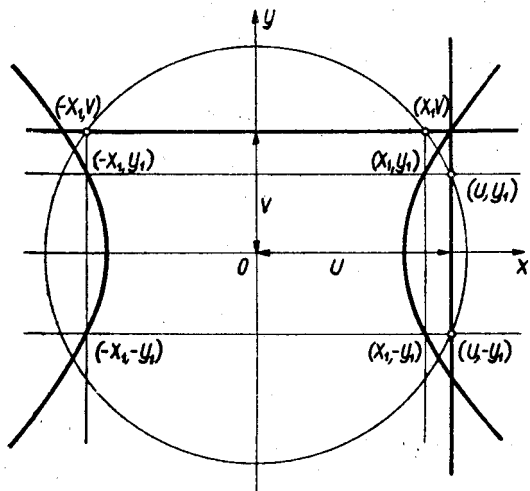
$$x_1^2 - y_1^2 = u^2 - v^2$$

egyenletet kapjuk. Az indexet most már elhagyva annak hangsúlyozására, hogy ha r változik az x_1 és y_1 , értékek is változnak és feltéve, hogy $u^2 \neq v^2$,

$$\frac{x^2}{u^2 - v^2} - \frac{y^2}{u^2 - v^2} = 0,$$

ha $|u| = |v|$; akkor az egyenlet így alakul:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0.$$



Az előbbi egyenlő oldalú hiperbola egyenlete, melynek aszimptotái a koordináta-tengelyek szögfelező egyenesei, az utóbbi egyenletet viszont éppen e két szögfelező pontjainak koordinátái elégítik ki. A r változtatásával nyert (x, y) pontok mindig kielégítik az első, ill. a második egyenletet, a szerint, hogy milyen u és v értéke.

Fordítva, ha egy (x_0, y_0) pontra nézve $x_0^2 - y_0^2 = u^2 - v^2$ (vagyis az x_0, y_0 pont rajta van a fenti vonalon), akkor e pontból az adott egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai: (x_0, v) és (u, y_0) . Ezek távolsága az origótól: $\sqrt{x_0^2 + v^2}$ és $\sqrt{u^2 + y_0^2}$ a fenti egyenlőség szerint egyenlő, tehát e talppontok rajta vannak az origó körül rajzolt

$$r = \sqrt{x_0^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + y_0^2}$$

sugarú körön, vagyis az (x_0, y_0) pont kielégíti a mértani hely feltételeit.

Ezek szerint, ha $|u| \neq |v|$, akkor a mértani hely egyenlő oldalú hiperbola, melynek középpontja az adott pont, tengelyei párhuzamosak az adott egyenesekkel, a tengelyek hosszának fele $\sqrt{u^2 - v^2}$. A hiperbola átmegy az adott egyenesek (u, v) metszéspontján.

Ha $|u| = |v|$ vagyis az adott pont speciálisan a két adott egyenes egyik szögfelezőjén van, akkor a mértani hely a kérdéses szögfelezőből és az adott ponton át rá merőlegesen húzott egyenesből áll. Azt szoktuk mondani, hogy a hiperbola ebben az esetben két egyenesre fajul.

Megjegyzés: Ha az adott egyeneseket választjuk a koordinátarendszer tengelyeinek és az adott pont: $O(u, v)$ akkor a geometriai hely egyenlete:

$$\frac{(x - u)^2}{u^2 - v^2} - \frac{(y - v)^2}{u^2 - v^2} = 1$$

alakú lesz.

2. feladat.

Megoldás: Legyen a terv előtti év termelése T , akkor az első tervévben a termelés $T_1 = T + \frac{6}{100}T = T \cdot 1,06$ volt. A második tervévben a T_1 növekedett 8%-kal, vagyis a termelés a 2. tervévben $T_2 = T_1 \cdot 1,08 = T \cdot 1,06 \cdot 1,08$. Ezt a T_2 termelést akarják emelni 3 éven át, évente állandó $x\%$ -kal úgy, hogy az utolsó tervévben a termelés $T_5 = T_2 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3$ egyenlő legyen $T \cdot 1,1^5$ -nel.

Ha az egyszerűség kedvéért $1 + \frac{x}{100}$ helyett q -t írunk, akkor $T_2 q^3 = T \cdot 1,06 \cdot 1,08 \cdot q^3 = T \cdot 1,1^5$, amiből

$$q^3 = \frac{1,1^5}{1,06 \cdot 1,08},$$

vagyis

$$q = \sqrt[3]{\frac{1,1^5}{1,06 \cdot 1,08}} = 1,121$$

és így

$$x = 100(q - 1) = 12,1\%.$$

Tehát a hátralevő 3 évben a termelést évente 12,1%-kal kell emelni.

Megjegyzés: A szöveg úgy is értelmezhető, hogy az ötödik év termelése helyett, az öt évi össztermelésről van szó. Ez esetben (a T -vel való egyszerűsítés után, az

$$1,06 + 1,06 \cdot 1,08(1 + q + q^2 + q^3) = 1,1 \frac{1,1^5 - 1}{0,1} = 6,71561$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{6,71561 - 1,06}{1,1448} = 4,94$$

A jobboldali törtet 2 tizedes pontossággal kerekítettük, tekintve, hogy az egyenletet grafikusan fogjuk megoldani, és ebből nagyobb pontosságra aligha számíthattunk.

Ha mindkét oldalt $(q - 1)$ -gyel szorozzuk, akkor

$$q^4 - 1 = 4,94q - 4,94,$$

vagyis

$$q^4 = 4,94q - 3,94.$$

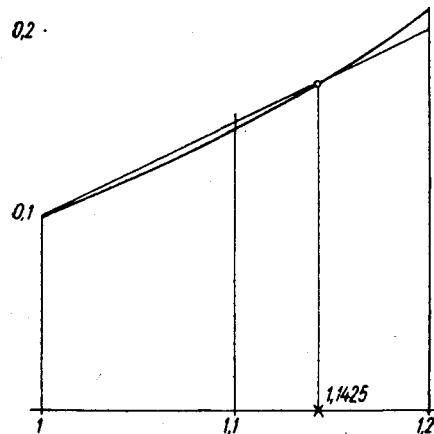
A $(q - 1)$ -gyel való szorzás folytán ennek a 4-edfokú egyenletnek – mely grafikusan könnyen megoldható – egyik gyöke 1, a többi gyökei megegyeznek az eredeti harmadfokú egyenlet gyökeivel.

A grafikus megoldás szempontjából célszerű egyenletünk mindkét oldalát 10-zel osztani:

$$0,1q^4 = 0,494q - 0,394.$$

Ábrázoljuk az $y_1 = 0,1q^4$ és $y_2 = 0,494q - 0,394$ függvényeket:

q	1	1,1	1,2
y_1	0,1	0,146	0,208
x_2	0,1	0,149	0,198

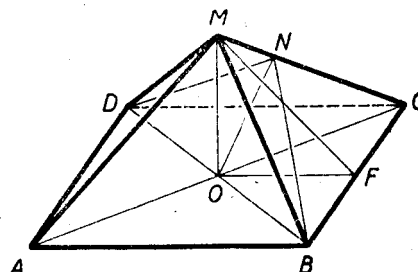


Az ábrából leolvasható, hogy az egyenes a negyedrendű görbét a $q = 1$ ponton kívül, még kb. a $q = 1,1425$ helyen metszi. (Könnyen meggyőződhetünk 4-jegyű függvénytábla segítségével, hogy $q = 1,141$ -nél a negyedfokú függvény még az egyenes alatt van, $1,144$ -nél már biztosan felette van, tehát $1,141 < q < 1,144$.)

Tehát ez esetben az utolsó tervévből 14,25%-kal kell évente emelni a termelést.

3. feladat.

I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Legyen az alapnégyzet egy oldala $BC = a$, az alapnégyzet félátlója $OB = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. A keresett OM -et jelöljük m -mel. A BD átlón át az MC oldalélre merőleges sík messe az oldalélt N -ben. Tehát $ON \perp MC$.

A feltétel szerint a $BND \sphericalangle = 120^\circ$. Legyen $OCN \sphericalangle = \alpha$. Mivel a BND egyenlőszárú háromszögben a szárákkal szembenfekvő szögek 30° -osak, azért

$$\sin \alpha = \frac{ON}{OC} = \frac{ON}{OB} = \operatorname{tg} OBN \sphericalangle = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ezt felhasználva, az OCM derékszögű háromszögből

$$m = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha = OC \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1 - 1/3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}.$$

Jelen esetben $a = 26$ cm és így $m = 13$ cm.

A keletkező számos derékszögű háromszög sokféle lehetőséget ad arra is a versenyzők ezeket ki is aknázták – hogy trigonometria felhasználása nélkül számítsuk ki a magasságot. Egy ilyen pl. a következő.

II. megoldás:

$$BF = OF = \frac{a}{2}. \text{ A } BON\triangle\text{-ből } BN = \frac{BO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2} / \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Az MFC és a BNC derékszögű háromszögek hasonlóak, mert a C -nél fekvő hegyes szögük közös, tehát

$$\frac{MF}{MC} = \frac{BN}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

vagyis

$$\frac{MF^2}{MC^2} = \frac{m^2 + \frac{a^2}{4}}{m^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{2}{3},$$

amiből

$$3m^2 + \frac{3a^2}{4} = 2m^2 + a^2, \\ m^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ és így } m = \frac{a}{2}.$$

III. megoldás: Legyen $MC = b$ és $BN = p$. Mivel a feladat szerint $BNO \sphericalangle = 60^\circ$, azért $ON = \frac{p}{2}$.

A $COM\triangle$ kétszeres területe kétféleképpen állítható elő:

$$2t = b \cdot \frac{p}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot m,$$

(1)

$$\text{vagyis } bp = am\sqrt{2}.$$

A $BCM\triangle$ kétszeres területe hasonlóképpen

$$bp = a\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

(1) és (2)-ből következik, hogy

$$am\sqrt{2} = a\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}, \\ 2m^2 = m^2 + \frac{a^2}{4},$$

amiből

$$m = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

IV. megoldás: Vegyünk 6, a feltételeknek megfelelő, gúlát és helyezzünk először hármat egymás mellé úgy, hogy csúcsaik és egy oldalélük egybeessenek. Mivel az oldallapok szöge 120° és 3 ilyen lapszög került egymás mellé, a 3 gúla hézag nélkül összeillik. Két-két gúla szomszédos oldallapjai pedig $360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$ -os szöget fognak alkotni. Így a szomszédos gúlákat közé egy-egy újabb gúlát illesztve úgy, hogy ezek csúcsa is összeessék a már összeillesztett

gúlák közös csúcsával, zárt testet kapunk, melyet 6 négyzet (a 6 gúla alaplappja) határol. Ez a test tehát csak kocka lehet. Két csúccsal szembefordított gúla magasságainak összege egyenlő a kocka élével, vagyis a gúla alapélével. Ebből következik, hogy a gúla magassága az alapél hosszának felével egyenlő.

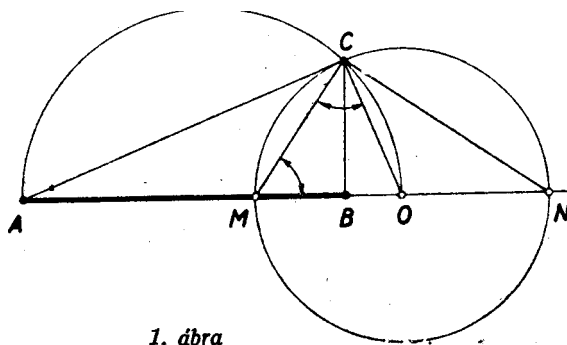
Így oldotta meg a feladatot *Szabó László* (Aszód, Petőfi g. IV. o. t.) és *Tuska Ferenc* (Cegléd, Kossuth g. IV. o. t.)

A pályázók legnagyobb része trigonometriai *táblákkal* szögeket határozott meg, ami – mint a fenti megoldások matatóják – teljesen felesleges.

A II. forduló feladatai

I. feladat.

I. megoldás: A C pont rajta van azon az Apollonius-féle körön, melynek minden P pontjára nézve $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}$. A $BAC\angle$ akkor maximális, ha AP a kör érintője. Ez az érintési pont lesz tehát a keresett C pont. Kimutatjuk, hogy $CBA\angle$ derékszög.



1. ábra

Az Apollonius-féle kör középpontját O -val és az AB egyenessel való metszéspontjait M és N -nel jelölve (1. ábra), a CM egyenes az $ABC\triangle$ AB oldalát $\frac{MB}{MA} = \frac{5}{13} = \frac{CB}{CA}$ arányban metszi, mert M is a kör egy pontja. Ebből viszont következik, hogy CM az $ACB\angle$ felezője,

$$(1) \quad ACM\angle + MCO\angle = 90^\circ,$$

mert az érintő merőleges a körsugárra.

Láttuk, hogy $ACM\angle = MCB\angle$. Másrészt a COM egyenlőszárú háromszögből

$$MCO\angle = OMC\angle.$$

Helyettesítsük az (1) alatti egyenlőségben szereplő szögeket a velük egyenlő szögekkel

$$MCB\angle + OMC\angle = 90^\circ,$$

de akkor az $MBC\triangle$ harmadik szöge, $MBC\angle$ is 90° , vagyis az $ABC\triangle$ derékszögű és így $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = BC\sqrt{2,6^2 - 1} = BC\sqrt{5,76} = 2,4BC$, vagyis

$$BC = \frac{5}{12}AB.$$

Tehát a C pontot a B pontban AB -re emelt merőleges egyenesen kell elhelyezni B -től $\frac{5}{12} \cdot AB$ távolságban.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak és alkalmazzuk az $ABC\triangle$ -re a sinus-tételt;

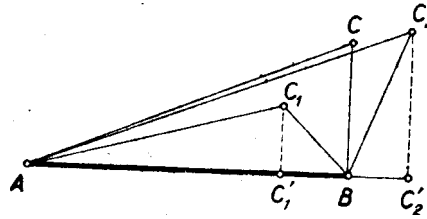
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CB}{CA} = \frac{5}{13}$$

amiből

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \cdot \sin \beta.$$

Mivel α szükségképpen hegyesszög, azért α akkor maximális, ha $\sin \alpha$ maximális; $\sin \alpha$ pedig akkor veszi fel a legnagyobb értéket, ha $\sin \beta = 1$, vagyis $\beta = 90^\circ$.

III. megoldás: Tekintsünk egy C_1 pontot, melyre nézve $\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{1}{2,6} = \frac{5}{13}$ és $C_1BA\angle$ hegyes, továbbá egy C_2 pontot, melyre nézve $\frac{C_2A}{C_2B}$ értéke ugyancsak $\frac{5}{13}$, de a $C_2BA\angle$ tompa. Legyen $C_1C'_1$ ill. $C_2C'_2$, a C_1 ill. C_2 pontoknak távolsága az AB egyenestől (2. ábra) és az A -nál keletkező szögeket jelöljük α_1 ill. α_2 -vel.



2. ábra

Mivel $C_1C'_1 < C_1B$ és $C_2C'_2 < C_2B$, azért

$$\sin \alpha_1 = \frac{CC_1}{C_1A} < \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{5}{13} \text{ és } \sin \alpha_2 = \frac{C_2C'_2}{C_2B} < \frac{C_2B}{C_2A} = \frac{5}{13}.$$

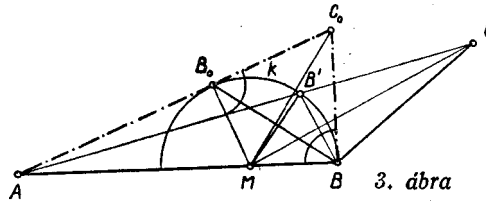
Tehát az A -nál levő szög sinusa *mindig kisebb* $\frac{5}{13}$ -nál, kivéve, ha a $CBA \triangleleft$ derékszög, ekkor $\sin \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{5}{13}$, vagyis ez esetben $\sin \alpha$ és vele együtt α maximális.

Így oldotta meg a feladatot *Fehér János* (Győr, Révai gimn.)

IV. megoldás: Mindazon közös AB oldalú ABC háromszögekben, melyekre teljesül az $AC : BC = 2,6$ kikötés, a C -nél fekvő szög felezője az AB oldalt olyan M pontban metszi, melyre $AM : BM = AC : BC = 2,6$. Az M pont helyzete független a háromszög alakjától. Tükrözzük a CMB háromszöget a CM szögfelezőre. A B pont tükörképe B' az AC háromszögoldalra esik és

$$MB' = MB$$

a C pont helyzetétől független távolság. Az összes ilyen pontok tehát az M középpontú és B -n átmenő k körön sorakoznak. (3. ábra).



Megfordítva, ha B' ennek a körnek tetszés szerinti pontja, akkor messzük el az AB' egyenest a $BMB' \triangleleft$ felezőjével. Az így keletkező ABC háromszögben MC szögfelező, mert MB' tükörképe MC -re MB , a C ponté pedig önmaga, tehát a CB' oldalegyenes tükörképe CB . Ebből következik az is, hogy

$$AC : BC = AM : BM = 2,6,$$

tehát az $ABC \triangleleft$ megfelel a követelményeknek.

Az eredeti feladat tehát helyettesíthető azzal, hogy a k kör mely B_0 -ját kell A -val összekötni, hogy a keletkező $B_0AB \triangleleft$ a lehető legnagyobb legyen. Ez a B_0 nyilván az A -ból húzható érintő érintési pontja. Ez esetben

$$MB_0 \perp AB_0$$

Szerkesszük meg a fent leírt módon az ezen B_0 ponthoz tartozó ABC_0 háromszöget. Ebben is $MBC_0 \triangleleft$ az $MB_0C_0 \triangleleft$ tükörképe, s így

$$ABC_0 \triangleleft = MB_0C_0 \triangleleft = 90^\circ.$$

V. megoldás: Keressük azon közös AB oldalú ABC háromszögek közül, melyekre $AC : BC = 2,6$ azt, amelyben a $BAC \triangleleft$ a lehető legnagyobb. A szögek azonban nem változnak, ha a háromszögeket nagyítjuk, vagy kicsinyítjük. Így helyettesíthetjük az összes háromszöget olyanokkal, melyekben az AC oldal közös. Ekkor

$$BC = \frac{AC}{2,6} = \frac{5}{13}AC$$

is az összes háromszögekben egyenlő, az összes B pontok tehát egy C körül $r = \frac{5}{13} \cdot AC$ sugárral rajzolt körön vannak. A $BAC \triangleleft$ akkor maximális, ha AB e kör érintője, tehát $BC \perp AB$ és Pythagoras-tétele alapján

$$AB = 2,4BC, \text{ vagyis } BC = \frac{5}{12} \cdot AB.$$

Számosan differenciálással oldották meg a feladatot, ami – mint láttuk – teljesen felesleges.

2. feladat.

I. megoldás: Jelöljük a keresett BC távolságot x -szel és legyen a személy-, teher- és gyorsvonat sebessége rendre c_1 , c_2 , ill. c_3 km/perc. A diák megfigyelése szerint

$$(1) \quad \frac{5}{c_1} + \frac{5}{c_2} = 15,$$

$$(2) \quad \frac{5}{c_2} + \frac{5}{c_3} = 11.$$

A $BC = x$ távolságot a személyvonat $\frac{x}{c_1}$ perc alatt teszi meg és ez alatt a tehervonat $\frac{10}{c_2}$ percig van úton B -től A -ig, és *utána* a gyors $\frac{10+x}{c_3}$ percig A -tól C -ig, tehát

$$(3) \quad \frac{x}{c_1} = \frac{10}{c_2} + \frac{10+x}{c_3}.$$

Tehát 3 egyenletünk van 4 ismeretlennel, vagyis nem határozhatók meg mind az ismeretlenek, de jelen esetben x meghatározható, csak c_1 , c_2 és c_3 marad határozatlan.

(1)-ből (2)-t kivonva

$$(4) \quad \frac{5}{c_1} - \frac{5}{c_3} = 4, \text{ amiből } \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} = \frac{4}{5}.$$

(2)-ből

$$(5) \quad \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{11}{5},$$

(3)-ból

$$\frac{x}{c_1} - \frac{x}{c_3} = \frac{10}{c_2} + \frac{10}{c_3},$$

vagyis

$$x \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) = 10 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right).$$

(4) és (5) figyelembevételével

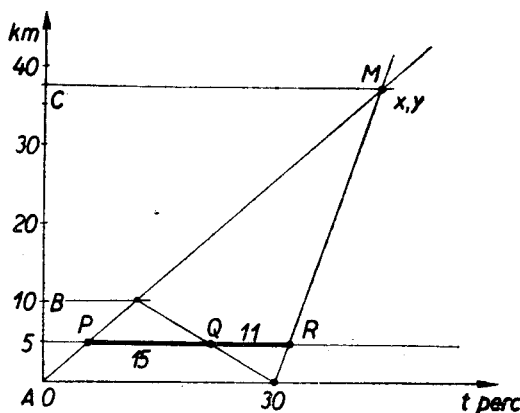
$$\frac{4}{5}x = 10 \cdot \frac{11}{5},$$

amiből

$$x = \frac{110}{4} = 27,5 \text{ km.}$$

II. megoldás: A diák megfigyelése szerint a személyvonat és a tehervonat egymásután $5 - 5$ km-t tesz meg összesen 15 perc alatt, míg a tehervonat és gyorsvonat ugyancsak $5 - 5$ km-t tesz meg egymásután összesen 11 perc alatt. Ebből következik, hogy a gyorsvonat 5 km-t 4 perccel rövidebb idő alatt tesz meg mint a személyvonat. A gyorsvonat az AB távolság F felező pontján $15 + 11 = 26$ perccel a személyvonat után halad át. Mivel 5 km-ként hoz be 4 perc időhátrányt, azért 26 perc időhátrányt $6,5 \cdot 5$ km = 32,5 km után hoz be. Tehát $FC = 32,5$ km és így $BC = FC - FB = 32,5 - 5 = 27,5$ km.

III. megoldás: Ábrázoljuk grafikusán a vonatok menetét. Először tüntessük fel az A pontból 0 perckor kiinduló személyvonat megtett km-eit, mint a t percek függvényét, tetszőleges sebesség mellett vagyis az AP egyenest *tetszőleges* szög alatt húzhatjuk (l. ábrát).



10 km megtevése után B -ből indul vissza a tehervonat A -ba ismét (bizonyos mértékig) *tetszőleges* sebességgel. A tehervonat 15 perccel a személyvonat után ér az 5 km-hez, tehát ábránkon $PQ = 15$ perc, amiből következik, hogy a tehervonat A -ba 30 perccel a személynek (0 perckor történt) indulása után érkezik. (Ábránkról geometriailag leolvasható. Mivel a gyorsvonat sebességének pozitívnak és felülről korláatosnak kell lennie, azért a tehervonat sebessége sem *egészen* tetszőleges. Ha a gyorsvonat részére óránkénti 150 km-es sebességet veszünk felső határnak, akkor 5 km megtevése a gyorsnak legalább 2 percre, a személynek pedig legalább $2 + 4 = 6$ percre van szüksége, tehát az $5P$ távolság ≥ 6 perc. Ebből következik, hogy $PQ = 15$ perc távolság *legfeljebb* az $5P$ távolság 2,5-szerese.)

A gyorsvonat a 30-ik percben indul el, de ennek sebessége már meg van határozva az előbbi két tetszőlegesen felvett sebesség által, mert 11 perccel a tehervonat után kell az 5 km-hez érnie. Tehát $QR = 11$ perc, vagyis az R pont meg van határozva és így a gyorsvonat menetét feltüntető egyenes is meg van határozva. Ez utóbbinak a személyvonat menetét feltüntető egyenessel való metszéspontja $M(x, y)$. M -nek y ordinátája, mely km-eket jelent, ábránkról leolvasható, de könnyen pontosan ki is számítható ábránkból

$$y : (y - 5) = MA : MP = 30 : 26,$$

miből

$$26y = 30y - 150,$$

$$y = 37,5 \text{ és így } BC = y - 10 = 27,5 \text{ km.}$$

Lényegében így oldotta meg a feladatot *Ádám András* (Hajdúszoboszló, Irinyi János g. IV. o. t.).

3. feladat.

I. megoldás: Bebizonyítandó tételünk így is írható:

$$3 + \frac{c}{a-b} \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) + \frac{a}{b-c} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} \right) + \\ + \frac{b}{c-a} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} \right) = 9,$$

vagyis

$$\frac{c}{a-b} \cdot \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{ab - b^2 + c^2 - ac}{bc} + \\ + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a^2 - ab + bc - c^2}{ac} = \frac{c}{a-b} \cdot \frac{-(a+b)(a-b) + c(a-b)}{ab} + \\ + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{-(b+c)(b-c) + a(b-c)}{bc} + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{-(c+a)(c-a) + b(c-a)}{ac} = \\ = \frac{c[-(a+b) + c]}{ab} + \frac{a[-(b+c) + a]}{bc} + \frac{b[-(c+a) + b]}{ac} = 6$$

Mivel a feltétel szerint $-(a+b) = c$, $-(b+c) = a$ és $-(c+a) = b$, azért

$$\frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 2 \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 6,$$

vagyis

$$(1) \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = 3.$$

Ennek helyességét kell tehát bizonyítanunk. Feltételünk szerint $c = -(a+b)$, és így

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = -\frac{a^3 + b^3 - (a+b)^3}{ab(a+b)} = -\frac{a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3}{ab(a+b)} = \\ = \frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)} = 3.$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Jegyzet: Az adott feltételek mellett az (1) alatti azonosság még így is bizonyítható:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = \\ = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 = 0, \text{ és mivel } a+b = \\ = -c, \text{ azért}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3c^3 - 3c^2 = 0,$$

amiből

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

II. megoldás: Az a , b , c , számok mind különbözők és egyike sem lehet 0, mert különben az adott szorzat értelmetlen.

Jelöljük a szorzat első tényezőjét A -val, második tényezőjét B -vel.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a-b)ab + (b-c)bc + (c-a)ac}{abc} = \\ &= \frac{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2 + bc(b-c))}{abc} = \\ &= \frac{(b-c)[a^2 - a(b+c) + bc]}{abc} = \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{c(b-c)(c-a) + a(a-b)(c-a) + b(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= -\frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

Tehát

$$AB = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc}{abc}.$$

Adjuk hozzá a számlálóhoz az $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^3b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$ kifejezést, amely a feltételünk szerint 0-val egyenlő.

$$\begin{aligned} AB &= \frac{2(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 9abc}{abc} = \\ &= \frac{2[a^2(a+b+c) + b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c)] + 9abc}{abc} \end{aligned}$$

Mivel tételünk szerint a számláló első tagja 0, azért

$$AB = \frac{9abc}{abc} = 9, \text{ ami bizonyítandó volt.}$$

Így végezte el a bizonyítást *Szekerka Pál* (Bp. VI. Kölcsey g. IV. o. t.)

Sok pályázó hivatkozott arra, hogy egy szám és reciprokának összege ≥ 2 , megfelelően arra, hogy ez csak *pozitív* számokra érvényes.