

## 2. Egyenlőtlenségek átalakítása

Mielőtt egyenlőtlenségekkel foglalkoznánk, először tisztáznunk kell, hogyan lehet egyenlőtlenségeket átalakítani, belőlük újabb helyes egyenlőtlenségeket nyerni. Legyen  $A$  és  $B$  két valós szám.  $A > B$  ugyanazt jelenti, mint hogy az  $A - B$  különbség pozitív. (Jelben így is írhatjuk:  $A - B > 0$ ). Az első közleményben a két szám számtani és mértani közepe közt fennálló egyenlőtlenséget is úgy sikerült bizonyítani, hogy különbségük előjelét állapítottuk meg. Hasonlóan bizonyíthatunk más egyenlőtlenségeket is.

Tegyük fel, hogy

$$A > B,$$

(azaz, hogy  $A - B$  pozitív).

a) Ekkor  $(A + C) - (B + C) = A - B$  is pozitív, tehát

$$A + C > B + C.$$

b) Másrészt  $cA - cB = c(A - B)$  pozitív, ha  $c$  pozitív, de negatív, ha  $c$  negatív, tehát ha  $c$  pozitív,  $cA > cB$ ; ha  $c$  negatív  $cA < cB$ .

c) Vizsgáljuk most  $A$  és  $B$  hatványait.  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ ,  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$  és általában bármely pozitív egész  $n$ -re  $A^n - B^n = (A - B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$ . Az első tényező feltétel szerint mindig pozitív. A második tényező előjeléről biztosat tudunk mondani, ha  $A$  is,  $B$  is pozitív. Ekkor biztos, hogy a második tényező és vele együtt a szorzat is pozitív, tehát ha  $A > B$  és  $A$  is  $B$  is pozitív, akkor  $A^2 > B^2$ ,  $A^3 > B^3$ , általában  $A^n > B^n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

d) Mit tudunk mondani  $A$  és  $B$  reciprokáról?

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B - A}{AB} = -\frac{A - B}{AB}.$$

Ha ismét  $A$  is  $B$  is pozitív, akkor a nevező is pozitív, feltevés szerint a számláló is pozitív, így a tört negatív az előtte álló előjel miatt, tehát

$$\frac{1}{A} < \frac{1}{B}.$$

Általában  $\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n} = \frac{B^n - A^n}{A^n B^n}$ . Ha  $n$  pozitív egész és  $A$  is  $B$  is pozitív számok, akkor a nevező pozitív, a számláló viszont a fentebb végzett átalakítások szerint negatív, így a tört értéke is, tehát

$$\frac{1}{A^n} < \frac{1}{B^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(Ez a  $c$ ) pont alapján következik az éppen bebizonyított  $\frac{1}{B} > \frac{1}{A}$  egyenlőtlenségből is.)

e) Legyen most  $A > B$  és  $C > D$ , vagyis  $A - B$  is,  $C - D$  is pozitív. Ekkor mindig pozitív  $A + C - (B + D) = (A - B) + (C - D)$  is, tehát

$$A + C > B + D.$$

f) Próbáljuk meg  $AC - BD$ -t is  $A - B$  és  $C - D$  segítségével kifejezni. E különbségeket rövidebb írás kedvéért  $b$ -vel és  $d$ -vel jelölve  $A = b + B$ ,  $C = d + D$ . Így  $AC - BD = (b + B)(d + D) - BD = bd + bD + Bd$  ( $b$  és  $d$  jelentését beírva könnyen látható az azonosság helyessége). Ha itt  $B$  is  $D$  is pozitív, akkor az utolsó kifejezés is, tehát  $AC - BD$  is. A feltételből természetesen az is következik, hogy a  $B$ -nél nagyobb  $A$  is és a  $D$ -nél nagyobb  $C$  is pozitív, tehát ha  $A < B$ ,  $C < D$  és  $A, B, C, D$  pozitív számok akkor

$$AC > BD.$$

Ezt az egyenlőtlenséget bebizonyíthattuk volna már előbb helyesnek bizonyult átalakítások segítségével is. Ugyanis b) szerint ha  $A > B$  és  $C$  pozitív, akkor  $AC > BC$ . Hasonlóan, ha  $C > D$  és  $B$  pozitív, akkor  $BC > BD$  is fennáll.

Vizsgálatunk alapján ha  $\alpha, \beta$ , és  $\gamma$  három olyan szám, amelyekre

$$\alpha > \beta \quad \text{és} \quad \beta > \gamma \quad \text{akkor} \quad \alpha > \gamma$$

is fennáll, mert  $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)$  és a jobboldalon mindkét kifejezés feltétel szerint pozitív.

Így az előbb nyert egyenlőtlenségekből következik a bizonyítandó  $AC > BD$  egyenlőtlenség.<sup>1</sup>

Itt az egyenlőtlenségekben szereplő mennyiségekre bizonyos feltételeknek kell teljesülniök, hogy az egyes következtetéseket levonhassuk. Kérdés azonban, hogy nem teljesül-e valamelyik egyenlőtlenség akkor is mindig, ha a feltételek valamelyikét elhagyjuk? Figyeljük meg pl. az  $f$ ) esetre adott kétféle bizonyítást. Az elsőből szükségesnek látszott  $B$ -ről is,  $D$ -ről is feltenni, hogy pozitívok. A második bizonyításban viszont csak annyit használtunk fel, hogy  $B$  és  $C$  pozitív.

<sup>1</sup> Ezzel teljes megoldását adtuk a 285. feladatnak.

Az előbbivel együtt pozitívnak kell lennie  $A$ -nak is, de  $D$  előjelére nem következik ebből semmi és valóban igaz is, hogy az  $AC > BD$  egyenlőtlenség helyes akkor is, ha a kiinduló egyenlőtlenségeken kívül csak  $A$ ,  $B$  és  $C$ -ről tudjuk, hogy pozitív,  $D$  azonban negatív.

Ennél többet azonban nem lazíthatunk a feltételeken. Ha pl. a két jobboldal negatív, akkor a  $2 > -3$ ,  $4 > -2$  egyenlőtlenségpár jobb- és baloldalainak szorzata közt a  $8 = 2 \cdot 4 > (-3)(-2) = 6$  egyenlőtlenség áll fenn, viszont a  $2 > -3$ ,  $4 > -3$  egyenlőtlenségpár jobb- és baloldalainak szorzata közt a  $8 = 2 \cdot 4 < (-3)(-3) = 9$  egyenlőtlenség. Így, ha mindkét jobboldal negatív, akkor azt sem állíthatjuk, hogy mindig a baloldalak szorzata a nagyobb, de azt sem, hogy mindig a jobboldalaké, mert mindkét esetben van olyan „ellenpéldánk”, amiben nem ez az eset következik be.

Mivel  $-1 > -2$ ,  $3 > 2$ -ből  $-3 = (-1) \cdot 3 > (-2) \cdot 2 = -4$ , de viszont  $-1 > -2$ ,  $5 > 2$ -ből  $-5 = (-1) \cdot 5 < (-2) \cdot 2 = -4$ , tehát akkor sem vonhatunk általános következtetéseket, ha az egyik egyenlőtlenség mindkét oldala negatív.

Ha a két egyenlőtlenség három tagja negatív, akkor a  $b)$  értelmében  $-1$ -gyel szorozva az egyenlőtlenségeket és az egyenlőtlenségeket az ellenkező értelművel cserélve fel, a már bebizonyított esetekre jutunk. Alkalmazásban azonban legtöbbször csak az  $f)$  alatt kimondott esetre lesz szükségünk.

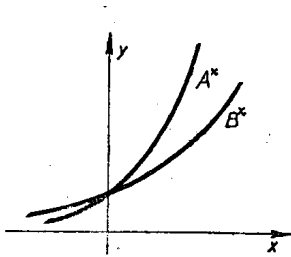
A  $c)$  pontban ha  $A$  pozitív,  $B$  negatív, akkor semmit sem mondhatunk, mert pl.  $3 > -2$ ,  $3 > -3$ ,  $3 > -4$ . Az első esetben  $3^2 > (-2)^2$ , a másodikban  $3^2 = (-3)^2$ , a harmadikban  $3^2 < (-4)^2$ .

Ha  $A$  is,  $B$  is negatív, akkor  $A > B$ -ből a  $b)$  pont szerint  $-A < -B$ , vagy  $-B > -A$  következik s így a  $c)$  pont szerint  $(-B)^n > (-A)^n$ . Ebből, ha  $n$  páros, azt kapjuk, hogy  $B^n > A^n$ , ha  $n$  páratlan, akkor viszont  $-B^n > -A^n$ ,  $A^n > B^n$ , tehát egyrészt a  $c)$  pontban szereplő egyenlőtlenségekre egész általánosan csak pozitív  $A$  és  $B$  mellett következtethetünk, másrészt a további eseteket erre vissza tudjuk vezetni. Teljesen hasonló a helyzet  $A$  és  $B$  előjelével a  $d)$  pontban is.

A másik feltevés a  $c)$  és  $d)$  pontban az, hogy az  $n$  hatványkitevő pozitív egész szám. A következtetés azonban helyes marad, minden pozitív (nem egész)  $n$  kitevőre is. Ha  $n = 1/q$ ,  $q$  pozitív egész,  $A$  és  $B$  pozitív és  $A > B$ , akkor nem lehet  $A^{\frac{1}{q}} = B^{\frac{1}{q}}$  ( $\sqrt[q]{A} = \sqrt[q]{B}$ ), mert ekkor  $A = B$  volna. Ha  $A^{\frac{1}{q}} < B^{\frac{1}{q}}$  állna fenn, akkor  $q$ -adik hatványra emelve a  $c)$  pont szerint következne, hogy  $A < B$ , tehát csak az lehet, hogy  $A^{\frac{1}{q}} > B^{\frac{1}{q}}$ . Ebből  $c)$  szerint az is következik, hogy ha  $p$  pozitív egész szám, akkor

$$A^{\frac{p}{q}} > B^{\frac{p}{q}}$$

Rajzoljuk most meg az  $y = A^x$  és  $y = B^x$  görbét.



Minden tört számmal fel nem írható  $x$ -hez akármilyen közel találunk tört számot. Ezekben mindig az első görbe van magasabban, mint a második, a görbék pedig összefüggő vonallal rajzolhatók meg, így az  $x$  pontban is az első görbe lesz magasabban.

Teljesen hasonlóan okoskodhatunk a  $d)$  pontban is.<sup>3</sup>

Az  $e)$  és  $f)$  pontban azt is felvethetnénk, hogy hogyan változik a helyzet, ha az egyik egyenlőtlenség helyett a két mennyiség egyenlőségét tudjuk. Legyen most pl.  $A < B$  és  $C = D$ , akkor mivel  $B > A$  és  $BC = BD$  az  $a)$  pont szerint  $BD = BC > AC$ , vagyis  $AC < BD$ . Ha pedig  $A$  (és vele együtt  $B$  is) pozitív, akkor a  $b)$  pont szerint  $AC < BD$  áll fenn.<sup>4</sup>

Miután két mennyiség  $A$  és  $B$  közt három kapcsolat állhat, fenn:  $A > B$  vagy  $A = B$  vagy  $A < B$ , így gyakran előfordul, hogy ezek közül csak az egyiket akarjuk kizárni. Az  $A \neq B$  jelöléssel már ebben a cikkben is találkoztatok. A többi esetben a fennmaradó két lehetőséget szoktuk felírni jelben. Például azt, hogy  $A$  nem lehet kisebb  $B$ -nél, így írjuk:  $A \geq B$ , és úgy olvassuk: „ $A$  nagyobb  $B$ -nél, vagy egyenlő vele”. Akkor az  $f)$  alatti és a most nyert eredményt (abban  $A$ -t és  $B$ -t felcserélve) így egyesíthetjük: ha

$$A > B \text{ és } C \geq D \text{ és } A, B, C, D \text{ pozitív,}$$

akkor

$$AC > BD.$$

Ugyanezen feltétel mellett

$$A + C > B + D.$$

<sup>2</sup> Pozitív szám tört hatványán (valamilyen gyökén) mindig ennek a pozitív értékét értjük.

<sup>3</sup> Ezzel a 286. feladatnak adtuk megoldását. *Megoldotta:* Kántor S., Részben: Rédy E., Zobor E., Zatykó L.

<sup>4</sup> Ezzel a 287. feladatnak adtuk megoldását. *Megoldotta:* Durst E., Kántor S., Kovács L., Reichlin V., Villányi O., Zatykó L., Zobor E. *Részben:* Rédy E.

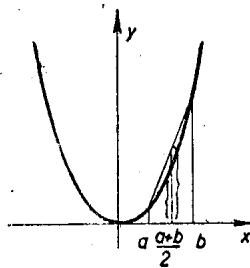
Azt figyeljük meg, hogy ha csak az egyik feltételben is nem szerepel az egyenlőségjel, akkor már a következményben sem állhat egyenlőség. Ha az első egyenlőtlenség helyett is  $A \geq B$  állna, akkor már a következményben is  $\geq$ -t kellene írunk, de még mindig azzal a megszorítással, hogy a következményben csak akkor áll fenn egyenlőség, ha mind a két feltételben az egyenlőség áll fenn.

### 3. Konvex függvények.

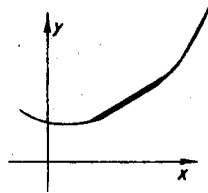
Első közleményünkben bebizonyítottunk egy egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép között és alkalmaztuk geometriai szélsőértékfeladatok megoldásában. A 252. feladat II. megoldásában (75–76. old.) egy másik egyenlőtlenséget használtuk geometriai szélsőértékfeladat megoldásában. Ezt az egyenlőtlenséget következő alakjában bizonyítottuk be: ha  $a, b$  pozitív számok, akkor a számtani közép négyzete és az ú. n. négyzetes közép közt a következő egyenlőtlenség áll fenn:<sup>5</sup>

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ezt felfoghatjuk úgy, hogy az  $y = x^2$  függvényt ábrázoló görbe egy tulajdonságát fejezi ki. Rajzoljuk fel a görbét és az  $a$  és  $b$  abszcisszájú pontokat. Ezek ordinátái  $a^2$  és  $b^2$ . Így  $\frac{a^2+b^2}{2}$  az e két pontot összekötő húr felezőpontjának az ordinátája. E pont abszcisszája  $\frac{a+b}{2}$  így  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  a görbe ugyanilyen abszcisszájú pontjának az ordinátája. Az egyenlőtlenség tehát azt fejezi ki, hogy a görbe bármely húrjának a felezőpontja a görbe fölött van. Ez szemléletesen világos is, mert a görbe alulról nézve domború, vagy idegen szóval konvex, s így egy húr minden pontja a görbe fölött van.



Ezek szerint hasonló egyenlőtlenséget nyerhetünk, ha ábrázolunk függvényeket és megnézzük, hogy az őket ábrázoló görbék alulról nézve domborúak-e vagy sem. Ezt ránézésre is könnyen eldönthetjük, ha a görbe elég egyszerű. Legfeljebb akkor merül fel kétség, ha a görbe ilyen alakú:



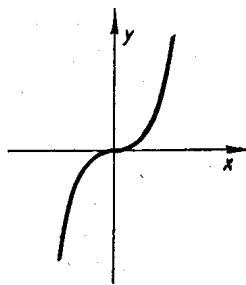
tehát egy darabja nem is homorú, nem is domború, hanem egyenes. Az ilyen görbéket is nevezhetjük konvexnek (alulról) akkor a konvexség tágabb értelmezéséhez jutunk. Egyezzünk meg abban, hogy a jövőben ha görbék domborúságáról beszélünk, azt mindig alulról nézve gondoljuk. Továbbá, ha röviden konvexet (domborút) mondunk, akkor mindig a szűkebb értelemben gondolunk tehát olyan görbére, amelyben nincs egyenes rész. Ellenkező esetben mindig jelezni fogjuk, hogy tágabb értelemben konvex görbéről van szó.

Ha egy függvényt konvex görbe ábrázol, akkor a rövideg kedvéért a függvényt is konvexnek nevezzük. Hasonlóan, ha egy függvény görbéje alulról homorú (konkáv), akkor a függvényt is konkávnak nevezzük. Ha a görbe konvex, ill. konkáv, de előfordulhat benne egyenes rész is, akkor tágabb értelemben konvexnek, ill. tágabb értelemben konkávnak nevezzük és ugyanígy a függvényt is, amelyet ábrázol.

Aki már ábrázolta az  $x^3$  függvényt, emlékszik rá, hogy ennek a görbének az  $y$  tengelytől jobbra eső darabja alulról domború, az  $y$  tengelytől balra eső része viszont alulról homorú.

<sup>5</sup>Valóban a két oldal különbsége

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$$



Ilyenkor a függvényről is azt mondjuk, hogy a megfelelő szakaszon konvex, ill. konkáv; tehát pl. az  $x^3$  függvény  $x$  pozitív értékeire konvex, negatív értékeire pedig konkáv.

**311.** Ábrázoljuk a

(A)  $\sqrt{x}, -\sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^3}, 2^x, 10^x, \lg x (= \log x),$   
 $a^x$  ( $a$  tetszőleges pozitív szám),  $\sin x, \cos x, ax + b$

függvényeket és állapítsuk meg *a rajz alapján*, hogy  $x$  mely értékeire konvexek, mely értékeire konkávok ezek a függvények. Milyen különleges tulajdonsága van ezek közül az utolsó kifejezéssel jellemezhető függvényeknek konvexitás szempontjából? Van-e más hasonló tulajdonságú függvény is?

\*

Nem nagyon megbízható dolog azonban egy függvény tulajdonságait az őt ábrázoló görbéről olvasni le, mert ezt a görbét nem tudjuk pontosan megrajzolni. Csak egyes pontokban számíthatjuk ki a függvényértéket és azoknak az ábrázolásánál is követhetünk el hibát, de különösen az függvényi megítélésünktől, és kezűgyességünktől, hogy hogyan húzzuk a görbét a kijelölt pontok között. Az ábra magában például már arra sem volna teljesen megbízható, hogy megkeressük az  $x^3$  függvénynél azt a pontot, ahol a görbe (alulról nézve) konvexből átfordul konkávba. Mikor mégis természetesnek vesszük, hogy ez a pont a 0, akkor beleszámítjuk azt is, hogy a 0 pontnak bizonyos központi helyzete van ennél a görbénél. Valóban minden  $x$  értékre  $(-x)^3 = -x^3$ . Ez geometriailag azt jelenti, hogy a görbe  $x$  és  $-x$  abszcisszájú pontjai egymás tükörképei a 0 pontra nézve. A 0 pontnak ezt a tulajdonságát azonban nem a grafikonról könnyű leolvasni, hanem a függvény matematikai kifejezéséből. Ha megpróbáljátok az  $\frac{x}{x^2 + 1}$  görbét ábrázolni, az a 0 helyen átmegy domborúból homorúba, de ezen kívül negatív  $x$ -ekre is, pozitívokra is egy helyen átfordul homorúból domborúba. Ezeknek a fordulópontoknak a helyét már nehéz volna rajzról kielégítő pontossággal leolvasni, mert a közelükben nagyon kevésbé görbül a görbe. Az is előfordulhat, hogy a görbe oly kis darabon hajlik át homorúból domborúba és vissza, hogy azt rajzolás közben észre sem vesszük.

Szükségünk van tehát a grafikus ábrázolásnál biztosabb eszközre ahhoz, hogy eldöntsük egy függvényről, hogy konvex-e egy darabon vagy sem. Az erre kínálkozó út az, hogy keresünk olyan geometriai tulajdonságokat, amik teljesen kifejezik azt, hogy a görbe konvex, de emellett arra is alkalmasak, hogy ábrázolás nélkül, kizárólag a függvényvel felírhatók legyenek. Sok ilyen tulajdonság van. Ezek közt az egyik legegyszerűbbet már meg is fogalmaztuk éppen akkor, amikor egyenlőtlenségek és a függvénygörbe domborúsága közt találtunk kapcsolatot: (alulról) domború görbének egy, húr végpontjai közti íve teljesen a húr alatt van. Megfordítva is: ha egy görbedarabnak bármely húra a megfelelő ív felett van, akkor a görbedarab konvex.

Próbáljuk meg ezt a geometriai tulajdonságot a függvény segítségével felírni.

**312.** Legyen az  $X$  tengely két adott pontjának koordinátája  $x_1$  és  $x_2$ . Mutassuk meg, hogy bármely közöttük levő pont alkalmas pozitív  $p_1$  és  $p_2$  számokkal felírható

(B) 
$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

alakban. Áttekinthetőbbé válik a kifejezés, ha  $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$ -t  $q_1$ -gyel  $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$ -t  $q_2$  vel jelöljük. Ekkor a pont így is írható:

(B') 
$$q_1 x_1 + q_2 x_2$$

ahol  $q_1$  és  $q_2$  pozitív és  $q_1 + q_2 = 1$ .

Hogyan írható fel egy  $f(x)$  függvény görbéjének  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszájú pontjai közötti húrján (B) ill. (B') abszcisszájú pont ordinátája?

Írjuk le a konvexitást kifejező fenti tulajdonságot a függvényre vonatkozó egyenlőtlenség alakjában.

A nyerendő egyenlőtlenséget nevezik *Jensen-egyenlőtlenségnek*. Ha ebben  $q_1 = q_2 = \left(\frac{1}{2}\right)$  ill.  $p_1 = p_2$ , akkor kapjuk a *szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget*.

**313.** Hogyan szól a megfelelő egyenlőtlenség-konkáv, tágabb értelemben konvex, ill. tágabb értelemben konkáv függvényekre?

**314.** A 312. feladat eredményét felhasználva döntsük el, hogy az  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^3$ ,  $\frac{1}{x}$  függvények hol konvexek, hol konkávok.

**315.** Legyen  $p_1$  és  $p_2$  pozitív szám,  $q_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$ ,  $q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$  (tehát  $q_1 + q_2 = 1$ ). Nevezzük az  $x_1, x_2$  számok  $p_1$  és  $p_2$ , ill.  $q_1$  és  $q_2$  súlyokkal súlyozott számtani-, négyzetes-, illetőleg harmonikus közepének sorra a

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} = q_1 x_1 + q_2 x_2; \quad \sqrt{\frac{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2}{p_1 + p_2}} = \sqrt{q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2};$$

$$\frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}} = \frac{1}{\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}} = \frac{1}{\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2}}$$

kifejezéseket. Bizonyítsuk be, hogy a súlyozott harmonikus közép nem lehet nagyobb, mint a súlyozott számtani közép, ez pedig nem nagyobb a súlyozott négyzetes középnél. Mikor lehetnek egyenlők?

Írjuk fel a megfelelő egyenlőtlenségeket, ha  $p_1 = p_2$ , ( $q_1 = q_2$ ).

\*

A „súlyozott” jelző a fizikára emlékeztet. Mindjárt meglátjuk, mi indokolja ezt az elnevezést.

**316.** Az  $X$ -tengelynek az  $x_1$  pont és  $x_2$  pont közti szakaszát képzeljük el súlytalan rúdként a koordináta-síkból kivágva; helyezzünk el az  $x_1$  végpontban  $p_1$  súlyt, az  $x_2$  végpontban  $p_2$  súlyt. Az  $X$  tengely melyik pontjában lesz a rúd súlypontja?

Helyezzünk el az  $y = f(x)$  görbén fekvő  $(x_1, y_1)$  pontban  $p_1$ , súlyt, az  $(x_2, y_2)$  pontban pedig  $p_2$  súlyt. Ha ezeket képzeljük el súlytalan rúddal összekötve, akkor hol lesz most a rúd súlypontja? (Mi lesz az abszcisszája és mi lesz az ordinátája?)

Mit jelent a Jensen-egyenlőtlenség „fizikailag”? Mi van ha  $p_1$  és  $p_2$  súlyok egymással egyenlők?

Ebből a fizikai értelmezésből a Jensen-egyenlőtlenség egy általánosításához jutunk, ha kettő helyett több súlyt helyezünk el a görbe különböző pontjaiban: Három pont súlypontját úgy határozhatjuk meg, hogy az első két pont súlypontjába a két pont egyesített súlyát helyezzük, majd képezzük az így keletkezett pontnak és a harmadik pontnak a súlypontját és ugyanígy vesszük sorra hozzá a további pontokat.

**317.** Számítsuk ki az  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_k, y_k)$  pontokban rendre elhelyezett  $p_1, p_2, \dots, p_k$  súlyok súlypontjának abszcisszáját és ordinátáját.

Bizonyítsuk be, hogy bármilyen sorrendben is vesszük a pontokat a fenti eljárásban, ugyanazt a súlypontot kapjuk. Ugyanezt a számot kapjuk-e akkor is, ha a pontokat csoportokra választjuk és az egyes csoportok súlypontjainak számítjuk ki a súlypontját?

Bizonyítsuk be a 312. feladat alapján, hogy egy függvény akkor és csak akkor konvex, ha minden  $x_1, x_2, \dots, x_k$ -ra és minden pozitív  $p_1, p_2, \dots, p_k$ -ra

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}\right) \leq \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_k f(x_k)}{p_1 + p_2 + \dots + p_k}$$

vagy minden pozitív  $q_1, q_2, \dots, q_k$ -ra melyek összege 1,

$$(D') \quad f(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_k x_k) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_k f(x_k).$$

Mikor állhat fenn egyenlőség? (Mi az egyenlőtlenség fizikai értelme?)

Ez a „többtagú ( $k$ -tagú) súlyozott Jensen-egyenlőtlenség”. Hogy szól a  $k$ -tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség?

Látszólag semmire sem jutottunk. Azzal a céllal fordultunk a geometriához, hogy innen kapjunk segítséget újabb egyenlőtlenségek felkutatásához. Végül a fordított feladatra jutottunk s éppen geometriai tulajdonságok szigorú bizonyításához volt szükségünk egyenlőtlenségek bebizonyítására. Az utolsó feladatban azonban már láttunk példát arra, hogy bizonyos egyenlőtlenségek ismeretében a geometriai szemlélet rávezetett arra, hogy további egyenlőtlenségek helyességére tudjunk következtetni. További feladatunk az lesz, hogy olyan, lehetőleg egyszerű tulajdonságokat keressünk, amelyekből már a függvény konvex voltára következtethetünk, amelyekből tehát a konvexséget kifejező további egyenlőtlenségek helyessége már levezethető.