

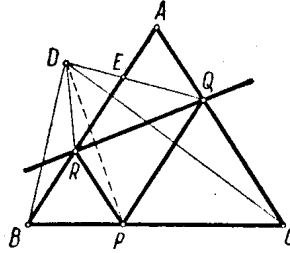
(A 2. feladat elemzése.)

Előző számunkban foglalkoztunk az 1949. évi Kürschák József matematikai tanulmányverseny tételei közül kettővel. A harmadikkal most részletesebben foglalkozunk. Ez a feladat a következő:

Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett P pontból a szárakkal párhuzamosakat húzunk, ezek a szárakat Q és R pontban metszik. Bizonyítandó, hogy a P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe az egyenlőszárú háromszög köré írt kör területén van.

E feladatnak több megoldását adjuk, majd a feladat általánosításával is foglalkozunk.

I. megoldás. Az egyenlőszárú háromszög csúcsát A -val, másik két szögpontját B -vel és C -vel jelöljük. A Q pont az AC száron, az R pont az AB száron van. A P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképét D jelöli.



Az A, B, C, D pontok egy körön vannak, ha

$$\angle ABD = \angle ACD.$$

Feladatunk megoldása ennek az egyenlőségnek igazolását jelenti. A szerkesztésből következik, hogy a QPC_Δ és RBP_Δ hasonló az ABC_Δ -höz. Tehát ezek is egyenlőszárúak, azaz $QC = QP$ és $RB = RP$. A tükrözés következménye, hogy $QP = QD$ és $RP = RD$. Eredményeinket összevetve $QC = QD$ és $RB = RD$, azaz a QCD_Δ és RBD_Δ egyenlőszárú. E két háromszög alapjánál fekvő szögek egyenlőségének bizonyítását tűztük ki éppen célunkul. Egyenlőszárú háromszögek alapjánál fekvő szögei egyenlők, ha csúcsuknál lévő szögeik egyenlők. A QCD_Δ és RBD_Δ csúcsánál fekvő szöge egyenlő, ha mellékszögeik egyenlők:

$$\angle AQD = \angle ARD.$$

E szögegyenlőséget kell tehát bizonyítanunk. Ezek a szögek az AQE_Δ -ben és a DRE_Δ -ben szerepelnek. E háromszögeknek E -nél lévő szögei csúcsszögek s így egyenlők. A bizonyítandó egyenlőség tehát igaz, ha a háromszögek harmadik szögei egyenlők:

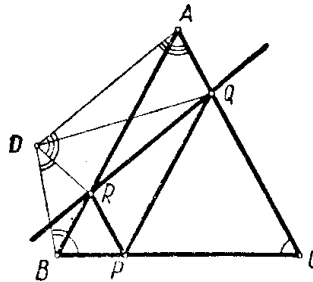
$$\angle QAR = \angle QDR.$$

E két szög viszont egyenlő, mert mindkettő egyenlő a QPR -gel: az egyik tükörképe, a másik az $AQPR$ paralelogrammában vele szemközti szög.

II. megoldás. Ki kell mutatnunk, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ehhez viszont elég azt belátni, hogy e négyszög szemközti szögeinek összege egyenlő, ábránk esetében:

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

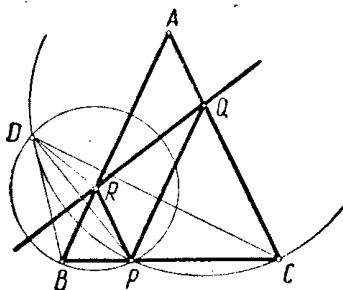
Ugyanis e négy szög összege 360° és így – ha az állított egyenlőség fennáll – az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek összege 180° , tehát e négyszög húrnégyszög.



Az egyenlőszárú ABC_Δ alapjánál fekvő szögei, ábránk egyíves szögei egyenlők. Az első megoldásból tudjuk, hogy az RBD_Δ egyenlőszárú s így az ennek alapjánál fekvő szögek, ábránk kétíves szögei is egyenlők. Az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz ugyanis átlói egyenlők: $AR = QD$ (mindkettő egyenlő a QP távolsággal, egyrészt az $AQPR$ paralelogramma szemközti oldalaként, másrészt a tükrözés folytán), és két szemközti oldala egyenlő (az előbbi indoklás szerint mindkettő egyenlő az RP távolsággal). Az $AQRD$ szimmetrikus trapéz egyik párhuzamos oldalánál fekvő szögei, ábránk három íves szögei tehát egyenlők.

Az állított szögegyenlőség mindkét oldala egy-egy egyíves, kétíves és háromíves szög összege. Ezért ez az egyenlőség valóban fennáll.

III. megoldás. Az első megoldásnál már beláttuk, hogy $QC = QP = QD$ és $RB = RP = RD$. Tehát a C, P, D pontokon áthaladó kör középpontja Q , a B, P, D pontokon áthaladó kör középpontja pedig R .



E körökre alkalmazzuk a kerületi és ugyanazon íven nyugvó középponti szögek tételét. E tétel szerint:

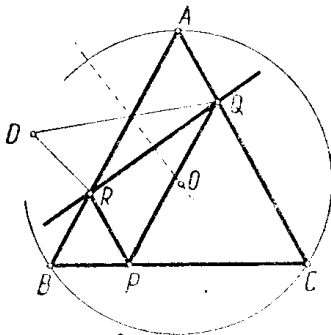
$$\begin{aligned} \angle CDP &= \frac{1}{2} \angle CQP, \\ \angle PDB &= \frac{1}{2} \angle PRB. \end{aligned}$$

A jobboldalokon szereplő szögek s a $\angle CAB$ -egyenlők, mert száraik párhuzamosak és egyirányúak. A baloldali szögek összege $\angle CDB$. Egyenleteink összeadásából tehát

$$\angle CDB = \angle CAB$$

adódik s így A és D ugyanazon a B és C ponton áthaladó köríven van.

IV. megoldás. A második megoldásnál már beláttuk, hogy az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz. Tehát a D pont az A pontnak tükörképe a QR távolság felező merőlegesére vonatkozólag.



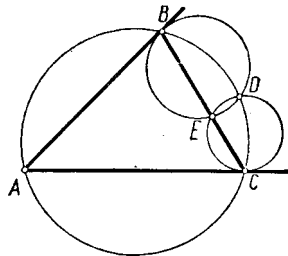
A kör kerületének egy pontját egy egyenesre tükrözve újból a kör kerületén lévő pontot kapunk, ha az egyenes áthalad a kör középpontján. Tehát azt kell belátnunk, hogy QR felezőmerőlegese áthalad az ABC_Δ köré írt kör középpontján.

Két pont távolságának felező merőlegese akkor halad át egy kör középpontján, ha a két pont a kör középpontjától egyenlő távolságra van. Azt kell tehát igazolnunk, hogy Q és R az ABC_Δ köré írt kör O középpontjától egyenlő távolságra van.

Az ABC_Δ köré írt körben, a kör középpontja körül elforgatjuk a BA húrt, amíg a (vele egyenlő hosszú) AC húr nem fedi. E forgatás az R pontot a Q pontba viszi, hiszen $BR = AQ$, mert a szerkesztés folytán mindkettő egyenlő a PR távolsággal. A kör középpontja körül való forgatással egymásba átvihető pontok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. Tehát Q és R valóban egyenlő távolságra van az ABC_Δ köré írt kör középpontjától.

V. megoldás. Rajzoljuk meg a harmadik megoldásban már szerepelt Q középpontú kört a C, P, D pontokon át s az R középpontú kört a B, P, D pontokon át.

195. feladat. Az ABC háromszög BC oldalán E pontot veszünk fel. Megszerkesztjük az ABC háromszög köré írt kört, valamint az E ponton áthaladó s az AB egyenest B pontban, ill. az AC egyenest C pontban érintő kört. Bizonyítandó, hogy e három kör egy közös ponton halad át.



Megemlítjük, hogy e feladat állítása a már idézett cikkben szereplő MIQUEL-tétel határeseteként is felfogható. Ha ugyanis az ABC háromszög AC oldalán felvett F pont C -hez, az AB oldalon felvett G pont B -hez közeledik s a BC oldalon felvett E pont helyben marad, akkor az AFG kör az ABC_{Δ} köré írt körré válik, a BEG és CEF körök pedig éppen a feladatunkban leírt helyzethez közelednek. E három kör, MIQUEL-tételének az idézett cikkben kiemelt speciális esete értelmében, egy ponton halad át. Ez áll a mondott határhelyzetre is. Éppen ennek határátmenet nélkül való bizonyítását bíztuk olvasóinkra.

196. feladat. A 195. feladat megoldásának birtokában már könnyű az ötödik megoldás bizonyítását az általánosítás bizonyításává átírni. Ennek kidolgozását is olvasóinkra bízuk.

Leszögezzük, hogy e feladat megoldásával az eredeti versenyfeladatnak a közölt öthöz csatlakozó újabb megoldása adódik.