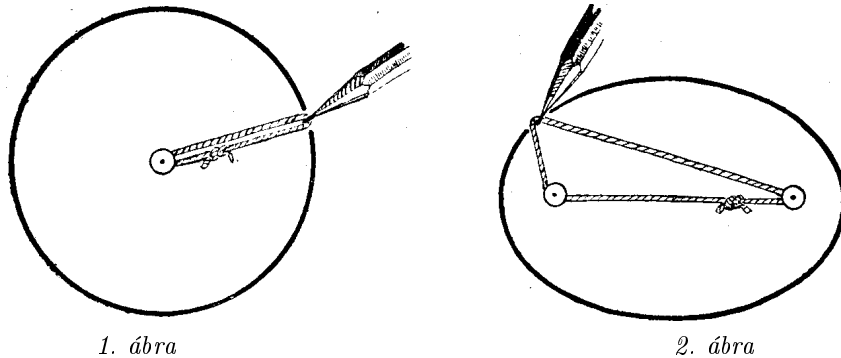


A síkgörbék fonalas szerkesztései közül a *kör* szerkesztése a legrégebb és a legegyszerűbb.

Fogjunk fonalat, ceruzát és rajzszöget. Kössük a fonal egyik végét a rajzszögre és szúrjuk be rajzszögünket a rajztáblánkra helyezett papírlapba. A fonal másik végén csináljunk hurkot. Ebbe tegyük bele ceruzánkat. Ceruzánkat mozgassuk úgy, hogy a fonal mindig kifeszüljön. Ekkor ceruzánk kört ír le. Még egyszerűbb, ha a fonalból hurkot csinálunk és ezt rátesszük rajzszögünkre. A hurkot ceruzánk segítségével kifeszítjük. Ceruzánkat úgy mozgassuk, hogy a hurok mindig kifeszüljön!



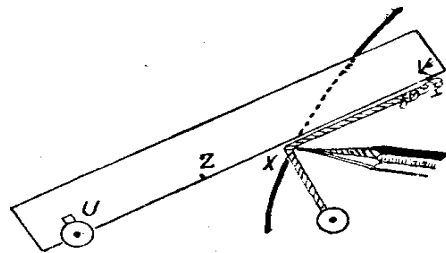
1. ábra

2. ábra

Ugyancsak egyszerű és rég ismert az *ellipszis* fonalas szerkesztése is. Fonal segítségével a következőképpen biztosíthatjuk, hogy ceruzánk két ponttól vett távolságának az összege ne változzék meg. Szúrjunk be rajztáblánkra helyezett papírlapba két rajzszöget. Ezekhez kössük egy fonal két végét. A fonal hossza nagyobb legyen, mint a két rajzszög közötti távolság. A fonalat ceruzával feszítjük ki. Ha ceruzánkat úgy mozgatjuk, hogy a fonal mindig feszüljön, akkor ceruzánk ellipszist ír le. Az ellipszisenél is el lehet kerülni a fonal lerögzítését azzal, hogy összekötjük a fonal két végét és az így keletkezett hurkot átvetjük a két rajzszögön.

Bizonyára sokan látták a kör és ellipszis fonalas szerkesztését és hallottak a *hiperbola* szerkesztéséről is, de valószínűleg kevesen vannak, akik látták is. Ennek az az oka, hogy a hiperbola fonalas szerkesztésére ismert eljárások között hibája, hogy fonalon kívüli más segédeszköz is kell hozzájuk s így nehézkesek.

A leginkább ismert módszernél fonalon kívül vonalzót is alkalmaznak. Ezzel kapcsolatban sem egyöntetű a kivitelezés. Egy tankönyv¹ ezt ajánlja:



3. ábra

Vastagabb favonalzó egyik sarka közelében fűrészeljünk bevágást (az ábrán *U*), a másik sarka közelében verjünk szöget (*V*), erre hurkoljunk zsinórt, a zsinór szabad vége érjen a vonalzó *Z* pontjához. Az *UZ* szakaszt, amennyivel a zsinór rövidebb a vonalzónál, nevezzük el a szerkesztés alapszakaszának. Most üssünk a rajzlapba két szöget (F_1, F_2), melyek az alapszakasznál nagyobb távolságra legyenek egymástól. Toljuk rá a vonalzó *U* bevágását az egyik szögre, kössük a zsinór *Z* végét a másikra. Ha most úgy rajzolunk görbét, hogy a ceruza a zsinórt a vonalzóhoz nyomja és egyúttal ki is feszíti, a vonalzó pedig forog F_1 körül, akkor hiperbolaágot kapunk.

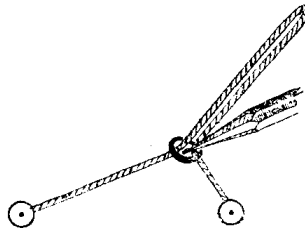
Más tankönyv² befűrészelés helyett azt ajánlotta, hogy lukasztott vonalzót akasszunk rá az egyik szegre. Az eljárás egyszerűbb – hiszen nem kell fűrészelnünk – viszont nagyobb hibaforrást okoz. A szerző meg is jegyzi, hogy *P* hozzávetőleg hiperbolaágot ír le.

A hiperbolával kapcsolatban említett mindkét fonalas szerkesztés nehézségekkel jár (alkalmas vonalzó, fonal rögzítése a vonalzóhoz). Talán ez az oka annak, hogy alig akad, aki el is készítené az eszközt.

Akadtak is, akik megkísérelték a hiperbola fonalas szerkesztését egyszerűsíteni. Egy ilyen egyszerűsített eljárás a hiperbola úgynevezett gyűrűs szerkesztése.

¹ Kárteszi F. – Erdősi J.: A tér megismerése (Bp 1948, 142. o.)

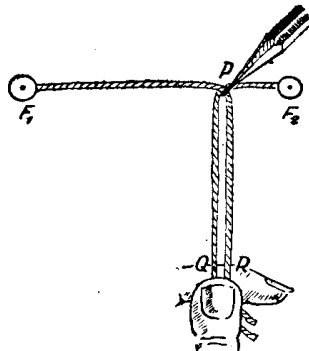
² Lóky Béla: Geometria a gimnáziumok és reál gimnáziumok VII–VIII. o. számára és magánhasználatra (Bp. 1930, 125. o.),



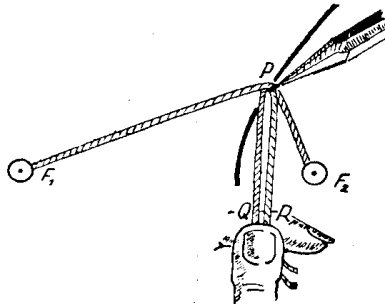
4. ábra

Ennél a szerkesztés a következőképpen történik: Két rajzszöget szúrunk rajzlapunkba és ezekhez rögzítjük egy fonal két végét. A fonal hossza legyen nagyobb mint a két rajzszög közötti távolság. Az így lerögzített fonalra, gyűrűt húzunk, mely összetartja a két rajzszöghöz futó fonalat. Fogjuk meg bal kezünkkel a gyűrű által keletkezett hurok végét és feszítsük ki. Ugyanakkor ceruzánkat helyezük el a gyűrűbe és mozgassuk ügyelve arra, hogy a hurok mindig feszesen maradjon és fonalunkon a hurkot mindig ugyanazon a ponton fogjuk. A ceruza hiperbolaívet ír le. Ez a szerkesztési eljárás sem olyan egyszerű azonban mint az ellipszis fonalas szerkesztése, most a gyűrű nehézkessé is teszi a szerkesztést, meg pontatlanná is. Mindjárt látni fogjuk, hogy teljesen fölösleges is a gyűrű. Olyan tisztán fonalas szerkesztést fogok ismertetni, mely egyszerűségben és eleganciában vetélkedik az ellipszis szerkesztésével és teljesen megoldja a hiperbola fonalas szerkesztését.

Szúrjunk papírlapba két rajzszöget és a beszúrt két rajzszögre kössünk egy-egy fonalat. A két rajzszög helyét jelöljük F_1 és F_2 -vel, a fogott két fonalvéget Q és R -rel. A két fonalat keresztezzük és a fonalak végét bal kezünkkel fogjuk meg. A kereszteződéssel keletkezett hurokba – jelöljük ennek a helyét P -vel – helyezük el ceruzánkat. Feszítsük ki a fonal két végét. Ekkor $PQ = PR$ folytán $PF_1 - PF_2$ állandó, egyenlő a két fonal hosszának különbségével. Q és R pontban a fonalakat jól fogva ceruzánkat úgy mozgassuk, hogy PF_1 , PF_2 , PQ és PR szakasz mindig feszüljön. (Természetesen ceruzánk csak úgy tud mozgást végezni, ha bal kezünk is elmozdul). Ceruzánk mozgás közben hiperbolaívet ír le. Hogy mozgás közben Q és R ne mozduljon el egymástól, azt úgy érzük el legkönnyebben, ha a két fonalat Q és R pontban csomóra kötjük és a csomót fogjuk meg, vagy ha mindjárt csak egy, elég hosszú fonalat veszünk és annak két végét rögzítjük F_1 és F_2 -ben.



5. ábra



6. ábra

Ez a szerkesztési eljárás igen közel áll a gyűrűs szerkesztéshez. Annyiban tér el, hogy a fonalak kereszteződésével kiküszöbölődik a gyűrű. Ezzel viszont kettős eredmény született: tisztán fonalas és pontosabb szerkesztés!

Ha a két rajzszög helyét nem változtatjuk és csak a fonalakat más két Q és R pontjukban kötjük össze, akkor az előbbivel közös gyújtópontú hiperbolát kapunk. Az ilyen hiperbolák közül igen érdekes az elfajult eset, mikor $PF_1 = PF_2$, vagyis P az $F_1 F_2$ szakasz felezőpontja. Ebben az esetben a P pont mozgásában *egyenesszakaszt* ír le. Ez tehát azok közé a szerkesztési eljárások közé tartozik, amely egyenes szerkesztésére az egyenes egyik jellemző tulajdonságát használja fel, mégpedig azt, hogy F_1 és F_2 két rögzített ponttól P mindig egyenlő távolságra van.

Érdekes, hogy olyan műszer, amely az egyenes valamely jellemző tulajdonságát használja fel egyenesszakasz leírására, csak 1864 óta ismeretes. Ez a műszer az inverzor nevű készülék³, mellyel a körsorokról szóló cikkben is találkozunk.

Úgy gondolom a cikk tartalmának megértése nem okozott nagyobb nehézséget. Aki megértette miről van szó, az könnyen tud megoldást találni a következő problémákra is:

1. A lukas vonalzóval történő hiperbolaszerkesztésnél valóban csak hozzávetőleg kapunk hiperbolaágat? Határozzuk meg a keletkező görbe egyenletét alkalmasan választott koordináta-rendszerben.
2. Határozzuk meg azon pontok geometriai helyét, amelyek két körtől egyenlő távolságra vannak.

³Lásd pl. *Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete* (Kolozsvár 1943, 71. o.).