

Az alábbiakban közöljük az 1. számban kitűzött feladatok megoldását.

6. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor $[2a] - 2[a]$ értéke vagy 0, vagy 1.

Megoldás: Ha a egész szám, akkor $2[a] = 2a$ és $[2a] = 2a$, tehát a vizsgálandó különbség $[2a] - 2[a] = 0$.

Ha a nem egész szám, legyen a benne foglalt legnagyobb egész szám: $[a] = a_0$, és így $a = a_0 + x$ ahol $0 < x < 1$. $2[a]$ értéke nem függ x -től, hanem bármely x -re $2[a] = 2a_0$. De $[2a]$ értékét már befolyásolja x értéke, ugyanis

$$[2a] = [2(a_0 + x)] = [2a_0 + 2x] = 2a_0 + [2x],$$

tehát

$$[2a] - 2[a] = 2a_0 + [2x] - 2a_0 = [2x].$$

Ha $2x < 1$, azaz $x < \frac{1}{2}$, akkor $[2x] = 0$, ha $1 \leq 2x < 2$, azaz $\frac{1}{2} \leq x < 1$, akkor $[2x] = 1$.

7. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ mindig egész szám.

Megoldás: Határozzuk meg egy p prímszám kitevőjét a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ kifejezés számlálójában és nevezőjében. Ha az derül ki, hogy a számlálóban minden p prímszám magasabb, vagy legalább akkora kitevőn szerepel, mint a nevezőben, akkor a nevező minden tényezőjével egyszerűsíthetünk és így $\binom{2n}{n}$ értékeül egész számot kapunk.

A számlálóban $(2n)!$ -ban egy p prímszám kitevője az 5. feladat megoldásából nyert Legendre-féle azonosság szerint

$$s_p = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor + \dots$$

A nevezőben $(n!)^2$ -ben minden p prímszám kitevője a kétszeres az $n!$ -ban szereplő kitevőnek, vagyis

$$n_p = 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots$$

A számlálóban és nevezőben levő kitevők különbsége

$$(1) \quad s_p - n_p = \left(\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \right) + \dots$$

Ez a kifejezés az előző feladatban szereplő $[2a] - 2[a]$ alakú kifejezésnek összege. Mivel ezeknek értéke 0 vagy 1, így összegük nem lehet negatív szám. Tehát valóban a nevezőben lévő kitevő legfeljebb akkora, mint a számlálóban lévő.

Ez viszont az előzőek alapján éppen azt jelenti, hogy $\binom{2n}{n}$ egész szám.

8. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ törzstényezőss felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$ -nél.

Megoldás: Nézzük meg legfeljebb hányadik hatványon fordulhat elő egy p prímszám. A kitevőben szereplő végtelen sok tagból álló összeg tagjai valahonnan kezdve mind 0-val egyenlők. Honnan? Biztosan eltűnnek a tagok attól a kitevőtől kezdve, amelyre $\frac{2n}{p^r} \geq 1$ és $\frac{2n}{p^{r+1}} < 1$. A két egyenlőséget összevetve kapjuk, hogy $p^r \leq 2n < p^{r+1}$. Tehát a fenti (1) kifejezésnek legfeljebb r tagja jön számításba. Ezek a tagok mind 0-val vagy 1-gyel egyenlők, tehát összegük legfeljebb r . Vagyis p legfeljebb r -edik hatványon szerepel, viszont p^r a fenti egyenlőség alapján $2n$ -nél kisebb, vagy vele egyenlő.

9. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímfényezőss felbontásában $\sqrt{2n}$ -nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek.

Megoldás: Ha $p > \sqrt{2n}$, akkor már $p^2 > 2n$, a 7. feladatban $s_p - n_p$ -nek csak egy tagja lehet, ez is vagy 0 vagy 1, tehát $\binom{2n}{n}$ már p^2 -tel sem osztható.

10. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható $\frac{2n}{3}$ és n közötti prímekkel, ha $n > 2$.

Megoldás: Az állítás bizonyítására azt kell igazolnunk, hogy minden olyan p prímszám, ami $\frac{2n}{3}$ és n között van, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ tört számlálójában és nevezőjében ugyanazon a kitevőn szerepel.

Legyen p egy ilyen prímszám, akkor $2p$ nagyobb $\frac{4n}{3}$ -nál, méginkább n -nél, tehát $n!$ tényezői közt már nem fordul elő. Így $n!$ törzstényezői közt p az első hatványon, tehát $(n!)^2$ -ben második hatványon szerepel. $(2n)!$ -ban p ugyancsak a második hatványon szerepel: ugyanis ha $\frac{2n}{3} < p$ akkor $3p > 2n$, tehát $3p$ nem szerepel a számlálóban, viszont $2p$ még előfordul, hiszen $2p < 2n$. $(2n)!$ -nek p -vel osztható tényezői p és $2p$. Szorzatuk $2p^2$, csak akkor lehet p -nek 2-nél magasabb hatványával osztható, ha $p = 2$ volna. Azonban p nagyobb $\frac{2n}{3}$ -nál, s így $n \geq 3$ folytán $p > 2$. $n = 2$ esetén $\binom{4}{2} = 6$ osztható 2-vel, pedig eleget tesz a kívánt egyenlőtlenségnek.

Most már csak a 16. feladatban szereplő egyenlőtlenség megcáfolása van hátra; ha ez sikerül, akkor, legalább is $n \geq 100$ esetén, képtelenség, hogy ne legyen prímszám n és $2n$ között. Ezért mindenekeelőtt azt nézzük meg, minél nem lehet a $\binom{2n}{n}$ kisebb.

17. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

18. Tegyük fel ismét, hogy $n \geq 100$ és hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $2^{\sqrt{2n}} \leq (2n)^{\frac{3}{2}}$ kellene legyen.

Ezt az egyenlőtlenséget most már nem lesz nehéz megcáfelnunk. Ugyanis legalább is valamilyen n -től kezdve, a baloldal nagyobb kell, hogy legyen, mint a jobboldal, hiszen n a baloldalon (ha gyökjel alatt is, de mégis csak) a kitevőben szerepel, a jobboldalon meg csak alapként.

19. Mutassuk meg, hogy:

a) ha $u \geq 4$ és u egész szám, akkor $2^u \geq 3(u+1)$;

b) ha $u \geq 4$, akkor $2^u > 3u$ (akár egész szám az u , akár nem);

c) ha $u \geq 12$, akkor (megint, akár egész szám az u , akár nem), $2^u \geq u^3$.

20. Mutassuk meg, hogy $n \geq 100$ esetén a 18. feladatban szereplő egyenlőtlenség nem állhat.

21. Mutassuk meg, hogy n és $2n$ között ($2n$ -et beleértve) mindig van prímszám; azaz: bizonyítsuk be Csebysev tételét.

No lám, nem is volt nehéz!