

Az 5. feladat megoldásával a Legendre-féle

$$n! = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \dots} \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{9} \rfloor + \lfloor \frac{n}{27} \rfloor + \dots} \cdot 5^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{125} \rfloor + \dots}$$

azonosságban (ahol a prímszámok persze n -ig mennek) olyan kulcshoz jutottunk, amely alkalmas egyes, a prímszámokra vonatkozó kérdések megoldására. De vajon hogyan forgassuk ezt a kulcsot, hogy a Csebysev-tétel nyitját megtaláljuk? Mit kezdjünk az $n!$ -sal, hogy épp az n és $2n$ közötti prímszámokról tudósítsunk bennünket?

CSEBYSEV eredeti bizonyítása egy nagyon bonyolult, az $n!$ segítségével képezett kifejezés vizsgálatán alapul. ERDŐS (és már előtte RAMANUJAN is a Csebysev-féle kifejezés helyett a sokkal egyszerűbb

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1)(n+2) \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 3 \dots n} = \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

kifejezést használja. Ezt a kifejezést $\binom{2n}{n}$ -nel (mondd: $2n$ alatt n , vagy $2n$ az n felett) szokás jelölni: általában $\binom{m}{n}$ -

nel az $\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ kifejezést jelöljük. Ez arról nevezetes, hogy egy m -tagú osztályból ennyi féleképpen lehet kijelölni

egy n -tagú küldöttséget; így $\binom{m}{n}$ csak látszólag tört, valójában mindig egész szám az értéke. De ERDŐS sem azért

gondolt arra, hogy, $\binom{2n}{n}$ segítségével fogjon hozzá a Csebysev-tétel bizonyításához, mert ha egy $2n$ -tagú osztálynak

pontosan a felét visszük kirándulni, akkor éppen $\binom{2n}{n}$ -féleképpen lehet kijelölni, hogy kik jussanak a kirándulók közé.

Hanem azért, mert $\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n}$ meg kell, hogy érezze, hogy n és $2n$ között vannak prímszámok.

Hiszen ezekkel a prímszámokkal minddel osztható, mert a számlálója osztható velük, de a nevezője nem; az n -ig terjedő prímszámok azonban a nevezőjében is előfordulnak, így ezek közül sok kiesik egyszerűsítés közben. Várható

hát, hogy ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából sokkal kisebb

értéket kapunk $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójában. Ismerkedjünk meg hát közelebbről a $\binom{2n}{n}$ -nel!

6. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor $[2a] - [a]$ értéke vagy 0, vagy 1.

7. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ mindig egész szám.

8. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ törzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$ -nél. (A hatványról van szó, nem a hatványkitevőről!)

9. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában a $\sqrt{2n}$ -nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek (azaz vagy nem szerepelnek, vagy csak első hatványon).

10. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható a $\frac{2}{3}n$ és n közötti prímszámokkal (n -et beleértve, ha prímszám; $\frac{2}{3}n$ -et akkor sem értve bele, ha n osztható 3-mal és $\frac{2}{3}n$ prímszám).