

Megoldások

a) A XLII. Eötvös Loránd Matematikai tanulmányverseny tételei.
1938. okt. 15

I.

Bebizonyítandó, hogy egy egész szám akkor és csak akkor négyzetösszege két egész számnak, ha kétszerese ily tulajdonságú.

Megoldás. Jelöljön x egy egész számot. Ki kell mutatnunk, hogy ha x két egész szám négyzetösszege, akkor $2x$ is ilyen tulajdonságú; ha pedig $2x$ két egész szám négyzetösszege, akkor x is ilyen tulajdonságú.

1^0 . Legyen tehát $x = a^2 + b^2$.

Ekkor $2x = 2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$.

2^0 . Legyen $2x = u^2 + v^2$.

Kell, hogy u és v egyidőben párosak vagy páratlan számok legyenek; minthogy így $\frac{u+v}{2}$ és $\frac{u-v}{2}$ egész számok,

$$x = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2.$$

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)

Jegyzet. A megoldások egy része nem juttatja kifejezésre a 2^0 . részben, hogy $\frac{u+v}{2}$ és $\frac{u-v}{2}$ egész számok.

Egy másik rész pedig csak az 1^0 . részt igazolja.

II.

Bebizonyítandó, hogy minden 1-nél nagyobb n egész szám

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1.$$

I. Megoldás. Ha $n > 1$ és a baloldali összegben, $\frac{1}{n+1}$ -től kezdve minden nevező helyébe a nála nagyobb n^2 -t tesszük, akkor mindegyik tört értéke kisebb lesz és így

$$f(n) \equiv \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Minthogy az $\frac{1}{n}$ -t követő tagok száma $n^2 - n$,

$$f(n) > \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n},$$
$$f(n) > 1.$$

Gantner Jenő (Szent-István g. VII. o. Bp. XIV.).

II. Megoldás. $f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, mert $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

$$f(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{9}$$
$$f(3) > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{9} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

azaz $f(3) > f(2)$.

Kimutatjuk általában, hogy $f(n+1) > f(n)$.

Ugyanis $f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$$f(n+1) = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) + \left[\frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}\right] =$$
$$= f(n) - \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

A szögletes zárójelben foglalt összeget kisebbítjük, ha minden tagjában a legnagyobb nevezőt, $(n+1)^2$ -t vesszük; a tagok száma pedig $(n+1)^2 - n^2$. Eszerint

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{(n+1)^2}.$$

Ezen kisebbítéssel azonban még mindig $\frac{1}{n}$ -nél többet kapunk, ha $n > 1$. T. i.

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2} > \frac{1}{n}, \quad \text{ill.} \quad 2n^2 + n > n^2 + 2n + 1, \quad \text{mert} \quad n(n-1) > 1,$$

ha $n > 1$. Tehát

$$f(n+1) > f(n) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad \text{azaz} \quad f(n+1) > f(n).$$

Kimondhatjuk tehát, hogy $f(n)$ az n -nel monoton növekedő; mivel $f(2) > 1$, egyszersmind $f(n) > 1$.

Taksony György (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

III. Megoldás. Bontsuk az $f(n)$ összeg azon részét, mely $\frac{1}{n}$ -t követi, részletösszegekre; ezek mindegyikét kisebbítjük, ha mindegyik helyébe a legkisebbiket (utolsót) vesszük. Ezen részletösszegek mindegyikében a tagok száma n , Tehát:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} &> n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} &> n \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} &> n \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(n-1)n+1} + \frac{1}{(n-1)n+2} + \dots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} &> n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Eszerint

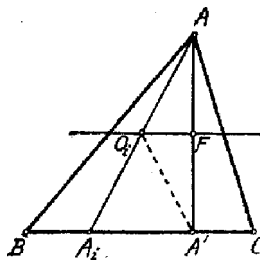
$$f(n) > \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > n \frac{1}{n} = 1.$$

Haraszthy András (Szent László g. VI. o. Bp. X.)

III.

Nevezzünk egy háromszög transzverzálisának minden oly egyenesdarabot, mely a háromszög egy csúcsát a szembenfekvő oldalnak (vagy meghosszabbításának) egy pontjával köt össze. Bebizonyítandó, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz létezik a térnek oly pontja, ahonnan a háromszög valamennyi transzverzálisa derékszög alatt látszik.

Megoldás. Az $ABC\triangle$ A csúcsából kiinduló AA_i transzverzális derékszög alatt látszik a transzverzális, mint átmérő fölé írt gömbfelület minden pontjából (és csakis ezekből). Ezen gömb keresztülmegy az A ponton és az A pontból húzott magasság A' talppontján, mert $AA'A_i \sphericalangle = 90^\circ$. A gömb középpontja az AA' magasságot merőlegesen felező egyenesen fekszik. Ebből következik, hogy valamennyi ilyen gömb átmegy az AA' , mint átmérő fölött, a háromszög síkjára merőleges Σ_1 síkban rajzolt körön.



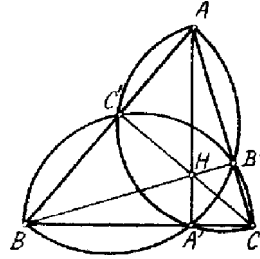
Ha ezen kör egy pontja P , az AA_i -hez tartozó gömb középpontja O_i , és AA' magasság felező pontja, a szóbanforgó kör középpontja F , akkor $O_iFP\triangle \cong O_iFA\triangle (\cong O_iFA'\triangle)$. T. i. $O_iF = O_iF$, $FP = FA (= FA')$ és $OF \perp \Sigma_1$, azaz $O_iFP \sphericalangle = O_iFA \sphericalangle (= O_iFA' \sphericalangle) = 90^\circ$.

Ebből következik, hogy $O_iP = O_iA (= O_iA')$, tehát a Σ_1 síkban fekvő kör minden pontja az O_i középpont körül $O_iA \left(= \frac{1}{2} AA_i \right)$ sugárral leírt gömb felületen fekszik.

Eszerint az AA' magasság, mint átmérő fölött a Σ_1 síkban leírt k_a kör bármely pontjából bármely AA_i transzverzális derékszög alatt látszik.

Hasonlóan a BB_j transzverzálisok a BB' magasság, mint átmérő fölött, az $ABC\Delta$ síkjára merőleges Σ_2 síkban leírt k_b kör, a CC_l transzverzálisok a CC' magasság, mint átmérő fölött, az $ABC\Delta$ síkjára merőleges Σ_3 síkban leírt k_c kör pontjaiból látszanak derékszög alatt.

Ha az $ABC\Delta$ hegyesszögű, akkor a háromszög H magassági pontja a háromszögön belül fekszik. Kimutatjuk, hogy ebben az esetben a k_a, k_b, k_c körök az ABC sík fölött (vagy alatt) egy S pontban metszik egymást.



A H pontban az $ABC\Delta$ síkjára emelt HZ merőleges a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ síkok közös egyenesére. HZ egyenes a k_a, k_b, k_c kört messe rendre a P_a, P_b, P_c pontban.

Mint hogy AP_aA', BP_bB', CP_cC' háromszögek a P_a, P_b, P_c csúcsoknál derékszögűek és ezekben HP_a, HP_b, HP_c az átfogóhoz tartozó magasságok,

$$\overline{HP_a}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HA'}, \quad \overline{HP_b}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HB'}, \quad \overline{HP_c}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HC'}$$

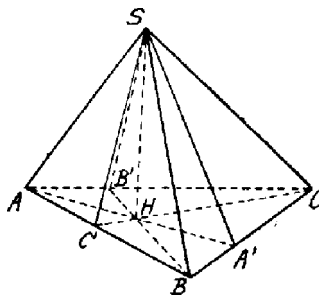
Azonban az $ABC\Delta$ síkjában az AB, BC, CA oldalak, mint átmérők fölött írt körök párjainak hatványvonalai a magasságok és így a magassági pont hatványa mindegyik körére nézve ugyanakkora, azaz

$$\overline{AH} \cdot \overline{HA'} = \overline{BH} \cdot \overline{HB'} = \overline{CH} \cdot \overline{HC'}$$

és így

$$HP_a = HP_b = HP_c, \quad \text{ill.} \quad P_a \equiv P_b \equiv P_c \equiv S.$$

Ebből az S pontból az $ABC\Delta$ bármely transzverzálisa derékszög alatt látszik.



Ha a háromszög derékszögű, pl. A -nál, akkor a k_a, k_b, k_c körök az A pontban érintik egymást. Az A csúcsból a BB_j és CC_l transzverzálisok derékszög alatt látszanak, míg az AA_i transzverzálisok 0° -ú szög alatt.

Ha $ABC\Delta$ tompaszögű, pl. A -nál, akkor a k_a kör az $ABC\Delta$ -et belül hasítja, a k_b és k_c körök a háromszögön kívül hasítják a háromszög síkját, tehát közös pontjuk nem lehet.

Volena-Koczor Imre (Révai Miklós g. VII. o. Győr).