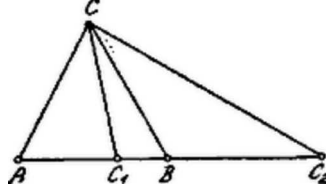


Az ABC háromszögnek $\overline{AB} = c$ oldalán jelöljük ki az (A, B) , (C_1, C_2) harmonikus pontpárokat úgy, hogy $\overline{AC_1} : -\overline{BC_2} = \overline{AC_1} : \overline{BC_2} = k_2 : k_1$, ahol k_2 és k_1 megadott pozitív számok.



Húzzuk meg ezután a CC_1 és CC_2 egyeneseket; ezen egyenesek hajlásszögével megegyező $\varphi = C_1CC_2$ szögét meg tudjuk állapítani a háromszög adataiból és a k_2, k_1 arányszámokból. Itt megjegyezzük, hogy C_1 az A és B közé, C_2 pedig B -től jobbra esik, ha $k_2 > k_1$, ellenkező esetben C_2 pont A -tól balra kerül.

A háromszög csúspontjait derékszögű koordinátaival oldjuk meg: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; ez alapon könnyen felírható a C_1 és C_2 pontok két koordinátája:

$$C_1 \left(\frac{k_2 x_2 + k_1 x_1}{k_2 + k_1}, \frac{k_2 y_2 + k_1 y_1}{k_2 + k_1} \right), \quad C_2 \left(\frac{k_2 x_2 - k_1 x_1}{k_2 - k_1}, \frac{k_2 y_2 - k_1 y_1}{k_2 - k_1} \right).$$

A két egyenes hajlásszögének tangense kiszámítható CC_1 és CC_2 egyenesek iránytényezőiből.

A CC_1 egyenes iránytényezője

$$m_1 = \left(\frac{k_2 y_2 + k_1 y_1}{k_2 + k_1} - y_3 \right) : \left(\frac{k_2 x_2 + k_1 x_1}{k_2 + k_1} - x_3 \right) = \frac{k_2(y_2 - y_3) + k_1(y_1 - y_3)}{k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_1 - x_3)}.$$

Hasonlóan a CC_2 egyenes iránytényezője

$$m_2 = \frac{k_2(y_2 - y_3) - k_1(y_1 - y_3)}{k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_1 - x_3)}.$$

Már most ismeretes, hogy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Ily módon némi egyszerűsítés után

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{[k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_1 - x_3)][k_2(y_2 - y_3) - k_1(y_1 - y_3)] - [k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_1 - x_3)][k_2(y_2 - y_3) + k_1(y_1 - y_3)]}{k_2^2(x_2 - x_3)^2 + k_2^2(y_2 - y_3)^2 - k_1^2(x_1 - x_3)^2 - k_1^2(y_1 - y_3)^2}$$

összefüggést nyerjük. Ha a műveleteket elvégezzük és figyelembe vesszük, hogy $a^2 = \overline{BC}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$, hasonlóképpen $b^2 = \overline{AC}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$, akkor a következő egyszerűbb alakot írhatjuk:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2k_1 k_2 [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]}{k_2^2 a^2 - k_1^2 b^2},$$

illetőleg

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2k_1 k_2 [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}{k_2^2 a^2 - k_1^2 b^2}.$$

Ámde ismeretes a háromszög területére vonatkozólag, hogy

$$2t = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

így azután

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4k_1 k_2 t}{k_2^2 a^2 - k_1^2 b^2} \dots$$

Vegyük most szemügyre néhány speciális esetet:

1. CC_1 legyen a háromszög szögfelezője; ekkor

$$AC_1 : BC_1 = b : a = k_2 : k_1 \text{ vagyis } k_2 a = k_1 b,$$

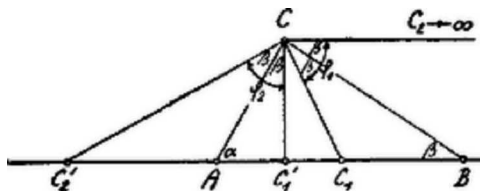
és így

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4k_1 k_2 t}{0} = \infty, \text{ tehát } \varphi = 90^\circ.$$

Ezen eredmény a szögfelezőnél jól ismert tulajdonság, hogy t. i. a belső és külső szögfelező merőleges egymásra.

2. Ha CC_1 a háromszög oldalfelezője, akkor $k_1 = k_2$, és a hajlásszögre $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4t}{a^2 - b^2}$ képletet nyerjük.

Ha a háromszög még egyenlőszárú, vagyis $a = b$, akkor az oldalfelező egyúttal szögfelező is, és $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4t}{0} = \infty$ eredmény értelmében $\varphi = 90^\circ$, amit már a fenti 1) esetnél is láttunk.



3. CC_1 legyen a háromszög magassága, vagyis $CC_1 = h$; ekkor $AC_1 : BC_1 = h \cot \alpha : h \cot \beta = k_2 : k_1$; innen $k_2 = \frac{k_1 \cot \alpha}{\cot \beta}$; ennek helyettesítése után

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4t \cot \alpha \cdot \cot \beta}{a^2 \cot^2 \alpha - b^2 \cot^2 \beta}.$$

Ha ezen esetet derékszögű háromszög átfogójára alkalmazzuk, vagyis $\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$ kikötés folytán $a = b \cdot \cot \beta$ és $b = a \cdot \cot \alpha$ helyettesítéseket végzünk, akkor a hajlásszögre nézve

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4t}{b^2 - a^2}$$

A 2. és 3. eset egybevetéséből kitetszik, hogy a derékszögű háromszögben az átfogó oldalfelezőjéhez

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4t}{a^2 - b^2}$$

szerint akkora hajlásszög tartozik, mint a magassághoz, amelyre nézve

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4t}{b^2 - a^2}.$$

Az ellenkező előjel azt jelenti, hogy e két egyenlő szög ($\varphi_1 = \varphi_2$) ellentétes oldalakon jelentkezik. (T. i. ha $a > b$, akkor a magasság talppontjára nézve ($k_2 < k_1$!).¹

Tihanyi Miklós

Esztergom, 1937.

¹ Ha ábránk szerinti C_1 az átfogó felezőpontja, akkor a $BCC_1\Delta$ egyenlőszárú háromszög ($CC_1 = BC_1 = \frac{AB}{2}$) BC alapján fekvő szögek egyenlők, ($= \beta$). Minthogy $CC_2 \parallel AB$, a $BCC_2\Delta = \beta$, tehát $\varphi = 2\beta$. Valóban

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = 2 \frac{b}{a} : \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{4t}{a^2 - b^2}.$$

Állítsunk már most CC_1 -re merőlegest. Akkor ez az AB -t C_2 pontban metszi úgy, hogy, ha C_1 a C -ből vont magasság talppontja,

$$AC'_1 : BC'_1 = AC'_2 : BC'_2.$$

Ugyanis

$$AC'_1 = b \cos \alpha, \quad BC'_1 = a \cos \beta; \quad \frac{AC'_1}{BC'_1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} AC'_2 &= C_1 C'_2 - C_1 A = \frac{CC_1}{\cos 2\beta} - C_1 A = \frac{c}{2 \cos \beta} - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \frac{1 - \cos \beta}{\cos 2\beta}, \\ BC'_2 &= C_1 C'_2 + BC_1 = \frac{c}{2 \cos \beta} + \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\beta}{\cos 2\beta}. \end{aligned}$$

Eszerint

$$\frac{AC'_2}{BC'_2} = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{2 \sin^2 \beta}{2 \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Minthogy $CC'_2 \perp CC_1$ és $C_1 CC'_1 \Delta = 90^\circ - 2\beta$, azért $C' CC'_2 \Delta = 2\beta$. Más szóval: CA felezi a $C'_1 CC'_2$ szöget.