

I.

1363. Legyen a pozitív egész $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok összege kisebb a pozitív egész k számnál. Bebizonyítandó, hogy

$$a_1!a_2!\dots a_n! < k!.$$

I. Megoldás. Kimutatjuk, hogy

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)!.$$

Ugyanis

$$a_1! = a_1!$$

$$a_2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_2 < (a_1 + 1)(a_1 + 2) \dots (a_1 + a_2) = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!},$$

$$a_3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_3 < (a_1 + a_2 + 1)(a_1 + a_2 + 2) \dots (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)!}{(a_1 + a_2)!},$$

.....,

$$a_n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_n < \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)!}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})!}.$$

A megfelelő oldalakat szorozva:

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < a_1! \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3)!}{(a_1 + a_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)!}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})!}.$$

A jobboldalon a számláló tényezői a nevezőben is előfordulnak, kivéve a legutolsót, tehát

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)! < k!.$$

Egry György János (Kölcsey Ferenc g. VIII. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Legyen $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$. Ekkor $s!$ jelenti az s különböző elem permutációit.

Ha az s különböző elemet szakaszokra osztjuk, melyekben az elemek száma rendre $a_1, a_2, \dots, a_n$ és ezen szakaszok elemeit egymás között permutáljuk, rendre $a_1!, a_2!, \dots, a_n!$ permutációit kapunk. Ha továbbá ezen különböző szakaszokból keletkező permutációkat – a sorrendjük szerint – minden lehetséges módon összekapcsoljuk, keletkezik

$$a_1! a_2! \dots a_n!$$

permutáció, melyek mindegyike benne van az s elem összes $s!$ számú permutációi között. De ezekkel nem merítettük ki az összes $s!$ számú permutációt, mert ezek között vannak olyanok is, melyek az

$$a_1!, a_2!, \dots, a_n!$$

számú permutációk sorrendjének felcserélésével keletkeztek és olyanok is, amelyekben az előbbi n szakasz valamelyikéből egyik vagy másik elemet átteszünk egy másik szakaszba és így permutálunk. Eszerint

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)! < k!.$$

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI.)

III. Megoldás. A csoportosítások tanában

$$P = \frac{k!}{a_1!a_2!\dots a_n!}$$

ahol $\sum_{i=1}^n a_i \leq k$, jelenti a k elemből alkotható permutációk számát, ha a k elem között a_1 , ill. $a_3, \dots$, ill. a_n számú

elem egyenlő, tehát P az egységnél nagyobb egész szám, még akkor is, ha $\sum_{i=1}^n a_i = k$.

Királyhídi Gyula (Szent-László g. VIII. o. Bp. X.)

II.

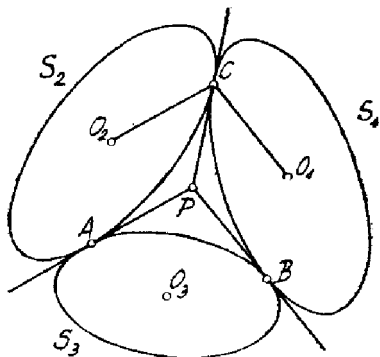
1364. Legyen a tér három köre oly tulajdonságú, hogy páronként érintkeznek és e három érintkezési pont egymástól különbözik. *Bebizonyítandó, hogy e három kör vagy egy gömbön vagy egy síkon fekszik. (Két térbeli kör akkor neveztetik érintkezőnek, ha közös pontjuk és ebben közös érintőjük van.)*

Megoldás. Előrebocsátjuk, hogy a kör érintője a kör síkjában fekszik. Ha két érintkező kör nem fekszik egy síkban, akkor közös érintőjük a két kör síkjának metszési vonala.

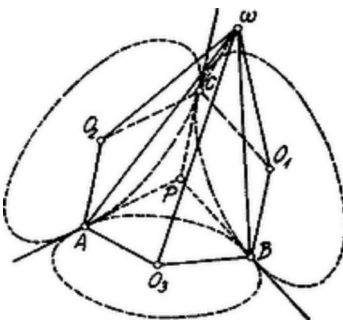
a) Ha a három kör közül kettő, k_1 és k_2 egy síkban (S) fekszik, akkor a harmadik kör, k_3 is az S síkban fekszik.

Ugyanis k_1 és k_3 közös érintője az S , k_2 és k_3 közös érintője is az S síkban fekszik. Ezen két érintő meghatározza a k_3 síkját, azaz S -t.

b) Ha két kör nem fekszik egy síkban, akkor a harmadik sem fekéldhetik az előbbieket egyikével sem egy síkban, ha a három érintkezési pont különböző: a három kör, k_1, k_2, k_3 (O_1, O_2, O_3 középpontokkal) a különböző S_1, S_2, S_3 síkokban fekszik. Két kör közös érintője síkjuknak metszésvonala; a három közös érintő egy triéder élei. A triéder csúcsa legyen P .



A k_1 és k_2 körök érintési pontja legyen C , a k_2 és k_3 köröké A , a k_3 és k_1 köröké B . Az O_1C és O_2C sugarak meghatároznak egy Σ_3 síkot, mely a PC közös érintőre merőleges.¹ Ha a Σ_3 síkban O_1C -re az O_1 -ben és O_2C -re az O_2 -ben merőlegest állítunk, ezek egy ω pontban metszik egymást. Már most $O_1\omega \perp S_1$, $O_2\omega \perp S_2$,² tehát ω a k_1 és k_2 körök minden pontjától egyenlő távolságban van: ω oly gömb középpontja, melynek gömbi körei k_1 és k_2 . A gömb sugara $\omega C = \omega B = \omega A = R$.



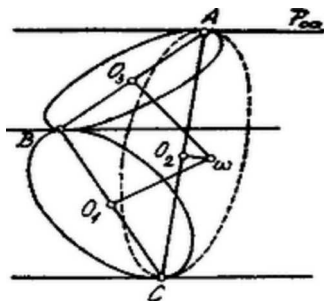
Már most az $O_1BO_3 \equiv \Sigma_2$ síkban az O_3 pontban, S_3 -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_1\omega$ egyenest; az $O_2AO_3 \equiv \Sigma_1$ síkban az O_3 pontban, S_3 -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_2\omega$ egyenest. Ez csak úgy lehetséges, ha $O_1\omega$ -t és $O_2\omega$ -t éppen az ω -ban metszi,³ azaz ω a k_3 kör minden pontjától $\omega B = \omega A = R$ távolságban van. Eszerint k_1, k_2, k_3 körök az (ω, R) gömbön fekszenek.

Az ω a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ síkoknak közös pontja; oly triéder csúcsa, melynek élei $\omega O_1, \omega O_2, \omega O_3$.

¹ Ugyanis $O_1C \perp PC$ és $O_2C \perp PC$.

² $O_1\omega \perp S_1$, mert: $\Sigma_3 \perp PC$, tehát PC merőleges a Σ_3 síkban fekvő bármely egyenesre; így $O_1\omega \perp PC$ és $O_1\omega \perp O_1C$. Hasonlóan következik: $O_2\omega \perp S_2$.

³ Ha az e_3 egyenes, mely nem fekszik az e_1 és e_2 egymást metsző egyenesek síkjában, metszi úgy az e_1 -et, mint az e_2 -t, akkor e_3 az e_1 és e_2 metszéspontján megy keresztül.



c) Ha P a végtelenben van, akkor a triéder éleiként szereplő közös érintők párhuzamosak (egy hasábos tér élei). Egy kör két érintője akkor párhuzamos, ha az érintési pontok egy átmérő végpontjai. Jelen esetben tehát az $ABC\triangle$ oldalai a k_1, k_2, k_3 körök átmérői; a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ síkok összeesnek az $ABC\triangle$ síkjával, tehát ω is ezen síkban van és nem más, mint az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja.

Weisz A.

III.

1365. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ pontok nem fekszenek egy egyenesen. Legyen továbbá P és Q két oly különböző pont, melyre

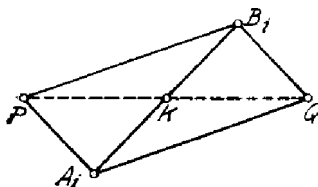
$$A_1P + A_2P + \dots + A_nP = A_1Q + A_2Q + \dots + A_nQ = s.$$

Bebizonyítandó, hogy van oly K pont, amelyre

$$A_1K + A_2K + \dots + A_nK < s.$$

Megoldás. Jelölje K a PQ távolság felezőpontját. Kössük össze a P, Q, K pontokat az A_i ponttal és hosszabbítsuk meg az A_iK -t a $KB_i = A_iK$ távolsággal. Ekkor A_iPB_iQ négyszögben az átlók: A_iB_i és PQ felezik egymást a K pontban, tehát a négyszög parallelogramma és ezért $QB_i = A_iP$. Az $A_iQB_i\triangle$ oldalaira nézve érvényes:

$$A_iB_i < A_iQ + QB_i \quad \text{vagyis} \quad 2A_iK < A_iQ + A_iP.$$



Alkalmazva ezen egyenlőtlenséget az $i = 1, 2, \dots, n$ esetek mindegyikében, keletkezik

$$2 \sum_{i=1}^n A_iK < \sum_{i=1}^n A_iP + \sum_{i=1}^n A_iQ = 2s,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^n A_iK < s.$$

Holzer Pál (Faludi Ferenc g. VIII. o. Szombathely)