

1339. Bizonyítsuk be, hogy ha két racionális számnak összege és szorzata is egész szám, akkor e számok maguk is egészek.

I. Megoldás. Segédétel. Ha $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ irreducibilis törtek és $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor kell, hogy $b = d$ legyen.

$\frac{a}{b}$ irreducibilis, ha a -nak és b -nek nincs közös osztója: $(a, b) \sim 1$ ¹

Hasonlóan $(c, d) \sim 1$.

Ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, akkor

$$ad = bc,$$

azaz az ad szorzat osztható b -vel; minthogy $(a, b) \sim 1$ kell, hogy d legyen b többszöröse.

Hasonlóan a bc szorzat osztható d -vel; azonban $(c, d) \sim 1$ kell, hogy b legyen d többszöröse.

A két megállapítás csak úgy állhat meg, ha $b = d$.

Legyenek már most $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ irreducibilis törtek úgy, hogy összegük és szorzatuk is egész szám. Tehát

$$(1) \quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = E_1, \dots$$

$$(2) \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = E_2, \dots$$

1)-ből:

$$\frac{p}{q} = \frac{E_1 s - r}{s},$$

ahol a jobboldal is irreducibilis tört; tehát $q = s$.

Tekintettel erre, 2)-ből $\frac{pr}{q^2} = E_2$,

azaz pr a q^2 többszöröse. Minthogy azonban $(p, q) \sim 1$ és $(r, q) \sim 1$, kell, hogy $q = s = 1$ legyen, tehát $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ egész számok.

Somogyi Antal (Gyakorló középiskola VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. A két racionális szám összege legyen p , szorzatuk q . A két szám mindegyike gyöke az

$$x^2 - px + q = 0$$

egyenletnek, ahol p és q egész számok. Tegyük fel, hogy ezen egyenletnek gyökei valósak és az egyik gyök $\frac{r}{s}$, ahol r és s relatív prímszámok.² Ha $\frac{r}{s}$ kielégíti az egyenletet, akkor

$$\left(\frac{r}{s}\right)^2 - p\left(\frac{r}{s}\right) + q = 0 \quad \text{vagy} \quad r^2 = s(pr - qs).$$

Eszerint r^2 az s többszöröse. Azonban $(r, s) \sim 1$ és így $(r^2, s) \sim 1$, tehát ellenmondásra jutottunk. Az ellenmondás csak akkor szűnik meg, ha $s = 1$, tehát, ha $\frac{r}{s}$ egész szám.

Kell tehát, hogy az

$$x^2 - px + q = 0$$

egyenlet valós és racionális gyökei egész számok legyenek, ha p és q egész számok.

Komlós János (Gyakorló középiskola, VIII. o. Pécs.)

Jegyzet. Általában: ha az

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

egyenletnek, amelyben $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ együtthatók egész számok, míg x^n együtthatója 1, minden racionális gyöke egész szám. (L. Kürschák: Matematikai Versenytételek, 75. o.)

III. Megoldás. Ha a és b racionális számok, p és q egész számok úgy, hogy

$$(1) \quad a + b = p, \dots$$

$$(2) \quad ab = q, \dots$$

¹ a és b legn. közös osztója 1.

² $(r, s) \sim 1$; $\frac{r}{s}$ nem egyszerűsíthető, irreducibilis.

akkor $(a - b)^2 = p^2 - 4q$ szintén egész szám és

$$(3) \quad a - b = \pm \sqrt{p^2 - 4q} = \pm k \dots$$

ahol a jobboldal racionális, egész szám.

1)-ből és 3)-ból

$$a = \frac{p \pm k}{2}, \quad b = \frac{p \mp k}{2}.$$

Ha p páratlan szám, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páratlan. Ha p páros, akkor $p^2 - 4q$ és így $\sqrt{p^2 - 4q} = k$ is páros. Eszerint a és b egész számok.

Berger Tibor (Fáy András g. VIII. o. Bp. IX.)

1340. Számítsuk ki logaritmustábla nélkül $\sin 3^\circ$ és $\cos 3^\circ$ értékét két tizedes pontossággal.

I. Megoldás. Valamely mennyiséget két tizedes pontossággal adunk meg, ha a hiba a századrész felénél nem nagyobb.

a) Ismeretes, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1$, azaz a kicsiny szögek sinusának közelítő értéke a szög abszolút mérőszáma, még pedig úgy, hogy $\sin x < x$.³

Kimutatjuk, hogy

$$\sin x > x - \frac{x^2}{4}.$$

Ugyanis

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right).$$

Azonban $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x^2}{2},$ ⁴

és, mivel $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, azért $1 - \sin^2 \frac{x}{2} > \frac{x^2}{4}$,

tehát

$$\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right), \quad \text{azaz} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

Ez annyit jelent, hogy ha $\sin x$ közelítő értékéül x -et vesszük, a hiba kisebb, mint $\frac{x^3}{4}$.

$$1^\circ \text{ abszolút mérőszáma: } \frac{\pi}{180} = 0,01745 \dots$$

$$3^\circ \quad \text{„} \quad \text{„} \quad : 0,5236 \dots$$

A hiba felső határa:

$$\frac{(0,05236 \dots)^3}{4} < \frac{0,06^3}{4} < 0,0001.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értékéül 0,05236-ot tekintve, legfeljebb a tizedredész nem pontos, de ezredredész feltétlenül pontos; ha tehát két tizedes pontossággal óhajtjuk $\sin 3^\circ$ -értékét, akkor ez: 0,05. A hiba, t. i. 0,002... a századrész felénél kisebb.⁵

b) Kicsiny szögek cosinusára érvényes:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Ugyanis

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2,$$

azaz

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ha pedig figyelemmel vagyunk arra, hogy

$$\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^3,$$

³ x a $\sin x$ -et felülről közelíti meg; x a $\sin x$ -nek fölösen közelítő értéke.

⁴ $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

⁵ Azonban $0,05 < \sin 3^\circ$.

akkor

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 1 - 2 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32} \right)^2,$$
$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{16 \cdot 32}.$$

Ha a jobb oldalon az utolsó tagot elhagyjuk, még nagyobbat kapunk, azaz

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Eszerint $1 - \frac{x^2}{2}$ a $\cos x$ -nek hiánnyal közelítő értéke; a hiba kisebb, mint $\frac{x^4}{16}$.

Azonban 3° esetében $\frac{x^4}{16} < \frac{(0,06)^4}{16} < 10^{-6}$,
tehát

$$1 - \frac{x^2}{2} = 1 - 0,00137 = 0,99863$$

feltétlenül pontos 4 tizedesig, azaz

$$0,998 < \cos 3^\circ < 0,999.$$

Eszerint, ha két tizedesig pontos értéket óhajtunk, akkor követünk el a századrész felénél kisebb hibát, ha $\cos 3^\circ = 1$.
NB. Pontosabb vizsgálatok kiderítették, hogy

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

és

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

azaz az előbbi számításokban jelzett hibahatárok csökkenthetők, tehát

$$\begin{array}{ll} \sin x \text{ esetében} & 0 < x - \sin x < \frac{x^3}{6} \text{ (az előbbi } \frac{x^3}{4} \text{ helyett),} \\ \cos x \quad „ & 0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) < \frac{x^4}{24} \text{ (az előbbi } \frac{x^4}{16} \text{ helyett).} \end{array}$$

Jegyzet. A dolgozatok általában nem ügyelnek a hiba megbecsülésére. Innen van az, hogy némely megoldásban ez található: $\sin 3^\circ < 0,052$, ill. $\cos 3^\circ = 0,99$.

Az itt közölt megoldásban követett gondolatmenet bármely elég kis szög sinusára, ill. cosinusára alkalmazható. Ha tekintettel vagyunk, hogy éppen 3° -ról van szó, számításunk egyszerűsíthető, a következő megoldás szerint.

II. Megoldás. Előbbi megoldásunk elején megállapítottuk, hogy

$$0,05 < \sin 3^\circ = 0,05236 \dots < 0,053.$$

Eszerint $\sin 3^\circ$ közelítő értéke két tizedes pontossáig 0,05.

Míthogy

$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 3^\circ} \\ \sqrt{1 - 0,053^2} &< \cos 3^\circ < \sqrt{1 - 0,05^2} \\ \sqrt{1 - 0,053^2} &= \sqrt{1 - 0,002809} = \sqrt{0,997191} = 0,998 \dots \end{aligned}$$

Eszerint

$$0,998 < \cos 3^\circ < 1$$

$\cos 3^\circ$ értéke két tizedes pontossáig 1.

Jegyzet. Ha figyelemmel vagyunk arra, hogy (mindig az első negyedben maradva)

$$\sin 2x < 2 \sin x, \quad \sin 3x < 3 \sin x, \quad \dots \quad \sin nx < n \sin x,$$

akkor

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &< 10 \sin 3^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \sin 3^\circ > \frac{\sin 30^\circ}{10} = \frac{0,5}{10}, \\ \sin 3^\circ &> 0,05. \end{aligned}$$

III. Megoldás. $\sin 3^\circ$ kiszámítható a sinusfüggvény addíció-tételének felhasználásával. Ugyanis

$$\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

A szabályos tízszög segítségével

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

15° függvényei a 30° -ú szög függvényeiből számíthatók ki.

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \cos 15^\circ &= \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

6

Ezekkel az értékekkel

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \\ &= \frac{1}{16} \left[\sqrt{30} - \sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{60+12\sqrt{5}} + \sqrt{20+4\sqrt{5}} \right].\end{aligned}$$

Számítsuk ki ezen négyzetgyököket 4 tizedes pontossággal:

$$\begin{array}{ll}\sqrt{30}=5,4772+\varepsilon_1 & \sqrt{6}=2,4491-\varepsilon'_1 \\ +\sqrt{10}=3,1623-\varepsilon_2 & +\sqrt{2}=1,4142+\varepsilon'_2 \\ +\sqrt{20+4\sqrt{5}}=5,3800-\varepsilon_3 & +\sqrt{60+12\sqrt{5}}=9,3184+\varepsilon'_3 \\ \hline 14,0195+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3 & 13,1817-\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3.\end{array}$$

7

Itt mindegyik $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, úgy, hogy a kivonásnál fellépő hiba abszolút értéke

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 - \varepsilon'_3| < \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 < 3 \cdot 10^{-4} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Ha most

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}(14,0195 - 13,1817) = \frac{0,8378}{16} = 0,0523\dots,$$

akkor ezen érték ezredrészig feltétlenül pontos; tehát századrész pontossággal $\sin 3^\circ = 0,05$.

$\cos 3^\circ$ értéke most már úgy számítható ki, mint a II. megoldásban.

⁶ A hiba könnyebb megbecsülése céljából alkalmazzuk a

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ felbontást. Ugyanis, négyzetreemeléssel}$$

$$2 + \sqrt{3} = x + y + 2\sqrt{xy}, \text{ tehát } x + y = 2 \text{ és } 2\sqrt{xy} = \sqrt{3}, \text{ ill. } xy = \frac{3}{4}.$$

x és y az $u^2 - 2u + \frac{3}{4} = 0$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Így

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \text{ és } \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}.$$

⁷ $\sqrt{5} = 2,236068\dots$