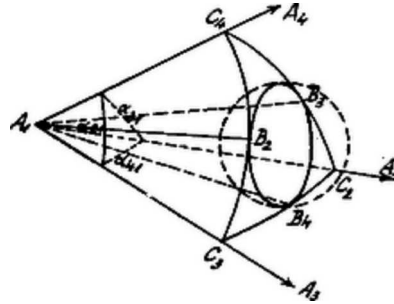


Előző közleményünkben (1. ezen évf. 2. számában) a tetraédernek a köréírt gömbbel kapcsolatos tulajdonságait tárgyaltuk; a következőkben a tetraédernek éleit, illetve lapjait érintő gömbre vonatkozó néhány jellegzetes tételt fogunk ismertetni.

Először a lapokat érintő, azaz beírt ¹ gömbbel foglalkozunk. A tetraéder belső lapszögeit felező hat síknak mindig van közös pontja és ezen közös pont mindegyik tetraéderlaptól egyenlő távolságra van, tehát beírt gömb mindig létezik.

A beírt gömb egyik jellemző tulajdonsága a következő: *Kössük össze a tetraéder egyik háromszöglapjának csúcsait a beírt gömbnek rajtalevő érintési pontjával; az összekötő egyenesek (transzverzálisok) ² által alkotott szögek legyenek $\sigma', \sigma'', \sigma'''$. Akkor a többi lapokon is, az érintési pont körül hasonló módon ugyanakkora $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ szögek keletkeznek. (Bang tétele.) A $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ szögek egyenlők a tetraéder-élekből alakakítható torznégyszögek fél szögösszegével.*



Jelöljük az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderbe írt gömb érintéspontjait B_1, B_2, B_3, B_4 -gyel, továbbá az i -dik lapban a k -ik csúcsnál fekvő élszöget α_{ik} -val (általában $\alpha_{ik} \neq \alpha_{ik}$) és tekintsük először a tetraéder egyik, például A_1 csúcsnál lévő triéderét. Az A_1 csúcsból az $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$ élek és az $\overline{A_1B_2}, \overline{A_1B_3}, \overline{A_1B_4}$ transzverzálisok indulnak ki. Szerkesszünk A_1 köré gömböt, mely a tőle egyelő távolságra lévő ³ B_2, B_3, B_4 érintéspontokon átmegy. Ez a gömb a triédert egy gömbháromszögben, a tetraéderbe írt gömböt pedig körben metszi, mely kör nyilván az előbbi gömbháromszög oldalait érinti, tehát

$$\begin{array}{ll} \widehat{B_3A_1A_2} = \widehat{B_4A_1A_2}^4 & \widehat{B_2A_1A_3} + \widehat{B_2A_1A_4} = \alpha_{21} \\ \text{egyrészt } \widehat{B_4A_1A_3} = \widehat{B_2A_1A_3} & \text{másképp } \widehat{B_3A_1A_4} + \widehat{B_3A_1A_2} = \alpha_{31} \\ \widehat{B_2A_1A_4} = \widehat{B_3A_1A_4} & \widehat{B_4A_1A_2} + \widehat{B_4A_1A_3} = \alpha_{41} \end{array}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \widehat{B_3A_1A_2} = \widehat{B_4A_1A_2} &= \frac{\widehat{A_2A_1A_3} + \widehat{A_2A_1A_4} - \widehat{A_3A_1A_4}}{2} = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{41} - \alpha_{21}}{2} \\ \widehat{B_4A_1A_3} = \widehat{B_2A_1A_3} &= \frac{\widehat{A_3A_1A_4} + \widehat{A_3A_1A_2} - \widehat{A_4A_1A_2}}{2} = \frac{\alpha_{41} + \alpha_{21} - \alpha_{31}}{2} \\ \widehat{B_2A_1A_4} = \widehat{B_3A_1A_4} &= \frac{\widehat{A_4A_1A_2} + \widehat{A_4A_1A_3} - \widehat{A_2A_1A_3}}{2} = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{31} - \alpha_{41}}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ugyanilyen összefüggések állapíthatók meg a többi csúcsok körüli élszögekre, ill. ezek részeire is.

Ezen összefüggések alapján közvetlenül kitejehetjük a B_i érintéspontokból húzott transzverzálisok által bezárt szögeket a tetraéder élszögei segítségével:

$$\begin{aligned} \widehat{A_1B_4A_2} = \widehat{A_1B_3A_2} &= 180^\circ - (\widehat{B_3A_1A_2} + \widehat{B_3A_2A_1}) = \\ &= 180^\circ - \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{41} + \alpha_{42} - \alpha_{21} - \alpha_{12}}{2} = \frac{\alpha_{34} + \alpha_{43} + \alpha_{21} + \alpha_{12}}{2} \end{aligned}$$

¹Tehát azzal a gömbbel, mely a tetraéderlapokat egy-egy belső pontban érinti. Tudvalevőleg hét olyan érintő gömb létezik, mely egyes tetraéderlapok meghosszabbításait érinti.

²„Transzverzális” rendszeren a háromszög csúcsát a szembenfekvő oldal valamely pontjával összekötő távolságot jelenti. Itt ezen kifejezést tágabb értelemben, a rövidebb fogalmazás kedvéért használjuk az egyes tetraéderszögeket a szomszédos érintési pontokkal összekötő távolságokra is.

³Ha a gömbhöz egy kívülfekvő pontból tetszőleges számú érintőt húzunk, az érintéspontok az érintők közös pontjától egyenlő távolságra vannak.

⁴A $B_2B_3B_4$ gömbi kör a $C_2C_3C_4$ gömbháromszögbe írt érintő kör. A C_i csúcs egyenlő gömbi távolságban van a B_k, B_l érintési pontoktól. Tehát pl. $\widehat{C_3B_4} = \widehat{C_3B_2}$ és így, $\widehat{B_4A_1A_3}$ és $\widehat{B_2A_1A_3}$ mint kongruens körívekhez tartozó középponti szögek egyenlők.

Egyszersmind utalunk arra, hogy az (1) alatti formulák ugyanolyan szerkezetűek, mint amelyek a síkháromszögbe írt kör érintési pontjának a szomszédos csúcsoktól való távolságát fejezik ki.

eszerint

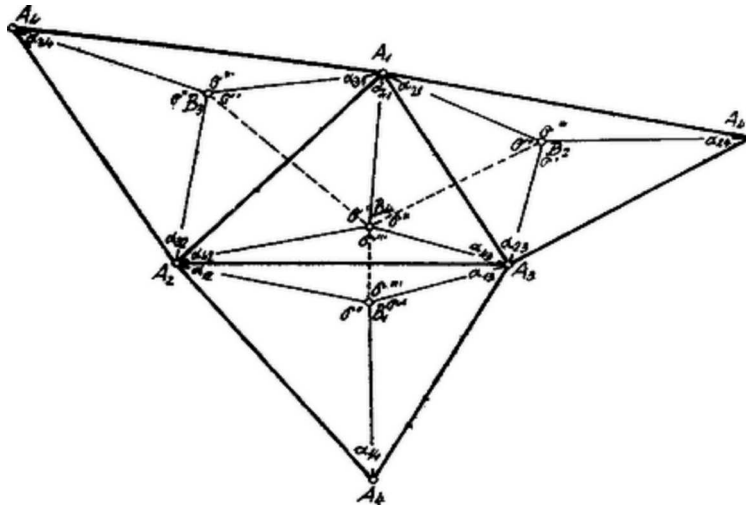
$$\begin{aligned}
 \widehat{A_3 B_2 A_4} &= \widehat{A_3 B_1 A_4} = \widehat{A_1 B_4 A_2} = \widehat{A_1 B_3 A_2} = \frac{\alpha_{34} + \alpha_{43} + \alpha_{12} + \alpha_{21}}{2} = \sigma' \\
 \widehat{A_2 B_3 A_4} &= \widehat{A_2 B_1 A_4} = \widehat{A_1 B_2 A_3} = \widehat{A_1 B_4 A_3} = \frac{\alpha_{24} + \alpha_{42} + \alpha_{13} + \alpha_{31}}{2} = \sigma'' \\
 \widehat{A_1 B_2 A_4} &= \widehat{A_1 B_3 A_4} = \widehat{A_2 B_1 A_3} = \widehat{A_2 B_4 A_3} = \frac{\alpha_{14} + \alpha_{41} + \alpha_{23} + \alpha_{32}}{2} = \sigma'''
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

azaz: a tetraéder $\overline{A_i A_k}$ és $\overline{A_l A_m}$ szemközti élei a (szomszédos) érintéspontokból

$$\frac{\alpha_{ik} + \alpha_{ki} + \alpha_{lm} + \alpha_{ml}}{2}$$

szög alatt látszanak. Az így nyert eredménynek nyilvánvaló következménye a említett Bang-féle tétel: A tetraéderlapokon levő B_i érintéspontokból a csúcsokhoz húzott transzverzálisok mind a négy lapon ugyanazon σ' , σ'' , σ''' szögeket alkotják.

A σ' , σ'' , σ''' szögek (2) alapján a következőképpen is jellemezhetők:



Ha a tetraéder éleiből minden lehető módon elhagyunk egy-egy szemközti élpárt, úgy három torznégyszöget nyerünk. A σ' , σ'' , σ''' szögek ezen torznégyszögek fél szögösszegeivel egyenlők. A fenti eredményt ezek szerint a háromszög-geometriából ismeretes szög-koordináták felhasználásával még a következőként fogalmazhatjuk: ⁵

A beírt gömb érintéspontjainak a szögkoordinátái mind a négy tetraéderlapon ugyanazok, éspedig egyenlők a tetraéderélekből alkotható három torznégyszög fél szögösszegével.

Izogónikusnak nevezzük az olyan tetraédert, melynek összes élei a beírt gömb (szomszédos) érintéspontjaiból a 120° alatt látszanak. A fentiek szerint egy tetraéder nyilván akkor és csak akkor izogónikus, ha az élekből alkotható három torznégyszög mindegyikének szögösszege 240° . ⁶

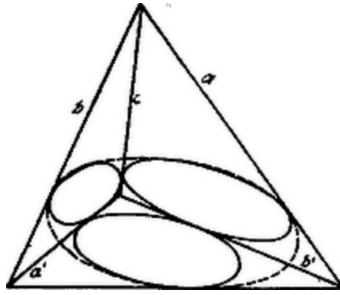
Ha egy triéder élszögeit felezzük és a felező egyeneseken át a megfelelő triéderlapokra merőleges síkokat állítunk, akkor ez a három felező merőleges sík egymást egy egyenesben metszi. ⁷ Az így nyert egyenes a triéder köré írt körkúp tengelye, vagyis azon pontok mértani helye, melyek a három triéderéltől egyenlő távolságra vannak.

Ha egy tetraéder mindegyik triéderéhez megszerkesztjük a körülírt körkúpot, a négy kúp tengelyei általában nem találkoznak egy pontban, tehát általában nincs olyan pont, mely egy tetraéder összes éleitől egyenlő távolságra van, nincs tehát olyan gömb sem, mely a tetraéder összes éleit érinti. Ilyen „érintő” gömb létezésekor a tetraéder alkatrészei közt bizonyos feltételek állnak fenn, melyek mint látni fogjuk, teljesen analógok a kör köré írt négyszög alkatrészei közt fennálló feltételekhez.

⁵ A háromszög geometriában a sík valamely pontjának a háromszöghöz viszonyított szögkoordinátái: a pontot a háromszög csúcsaival összekötő transzverzálisok által alkotott szögek. A háromszög belső pontjaira nézve ezen szögkoordináták összege nyilván 360° .

⁶ Az n oldalú torzsokszög szögeinek összege kisebb, mint az n oldalú konvex síksokszög szögeinek összege! (L. III. évf. 85. o. 187. feladatban.)

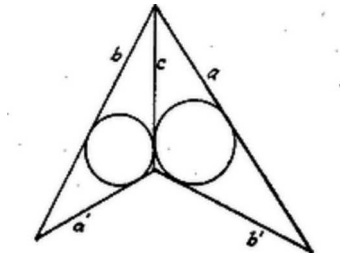
⁷ A bizonyítás azon alapul, hogy ha egy szög felezőjén át a szög síkjára merőleges síkot fektetünk, akkor ezen sík bármely pontja a szög vagy csúcshölygének szaraitól egyenlő távolságban van.



Ha ugyanis a tetraéder a, b, c, a', b', c' élei (l. ábra) egy gömböt érintenek, úgy nyilván azon három torznégyszög oldalai közt, melyek két-két szemközti él elhagyásával keletkeznek, ugyanazon feltételeknek kell fennállaniuk, mint egy kör köré írt négyszög oldalai közt, azaz

$$(3) \quad a + a' = b + b' = c + c'$$

Ki fogjuk mutatni, hogy ezen szükséges feltételek egyúttal elegendők is, azaz: *Egy tetraédernek akkor és csak akkor van (belső) érintő gömbje, ha a szembenlevő élek hosszúságösszegei egyenlők.*



Szerkesszünk mindegyik tetraéderlapba érintő kört. Az $(ab'c)$, illetve $(a'bc)$ lapba írt kör érintéspontjainak az (abc) csúcstól való távolsága

$$\frac{a + c - b'}{2}, \quad \text{ill.} \quad \frac{b + c - a'}{2},$$

ezen távolságok azonban a (3) relációk alapján egyenlők, tehát az $(a'b'c)$ és $(a'bc)$ lapokba írt körök érintik egymást. Miután az előbbi megfontolás mindegyik lappárra érvényes, tehát következik, hogy a tetraéderlapokba írt körök a (3) feltételek fennállása esetén egymást páronként érintik és pedig úgy, hogy az összes érintéspontok különbözők. Ekkor pedig a négy tetraéderlapba írt kör (l. ezen évf. 5. számában az 1364. feladatot) egy gömbön fekszik és az így meghatározott gömb a tetraéder érintő gömbje. Az így nyert eredményt még a következőképpen fogalmazhatjuk: *A belső érintőgömb létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy a tetraéderlapokba írt körök egymást páronként érintsék.*

Hasonlóképpen kimutatható, hogy egy tetraédernek akkor és csak akkor van külső érintő gömbje (azaz olyan, mely egyes éleknek a meghosszabbításait érinti) ha a tetraéder élek közt a

$$a - a' = b - b' = c - c'$$

feltételek állnak fenn.

Egerváry Jenő