

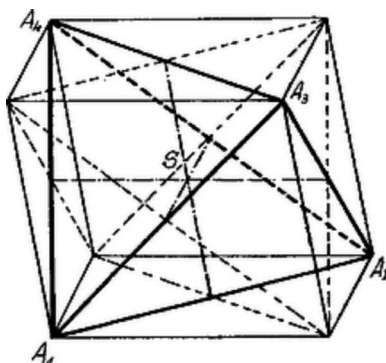
A tetraéder a legegyszerűbb síklapú test, melyet négy háromszöglap határol. Ámbár ugyanaz a szerepe a térmértanban, mint a háromszögnek a síkmértanban, általános tulajdonságai és osztályozása nem oly közismertek, mint a háromszögnél. Ennek oka nem csupán az, hogy a tetraéder több és többféle alkatrésszel bír mint a háromszög és így bonyolultabb alakzat, hanem az is, hogy a tetraédernek – mint általában minden testnek – az ábrázolása szemléletesség szempontjából tökéletlen, különösen akkor, ha a tetraéder bizonyos kitüntetett fajait ábrázoljuk.

Ilyen kitüntetett fajok az *egyenlőlapú* és a *magasságponttal bíró* tetraéder. Mindkettő figyelemreméltó módon mutatja, hogy a tetraéder és a háromszög között nem teljes az analógia.

Egyenlőoldalú háromszög csak egyféle van, t. i. a szabályos háromszög, melynek összes alkatrészei (oldalai, szögei) egyenlők. Ezzel szemben egyenlőlapú tetraéder számtalan sokféle van, a lapok területeinek egyenlősége nem vonja maga után az alkatrészek (élek, élszögek, lapszögek) egyenlőségét.

Másrészt viszont közismert, hogy bármely háromszög magasságai egy pontban találkoznak. Ezzel szemben a tetraéder magasságai általában nem metszik egymást, még páronként sem.

Jelen sorokban a tetraédernek néhány általános tulajdonságát, elsősorban pedig a most említett fajait fogjuk ismertetni. Ezen ismertetésnél hasznos segédeszköznek fog bizonyulni a körülírt paralelepipedon, amely nem csupán a tárgyalásnak fog bizonyos szemléletességet adni, hanem a tetraéder-alkatrészek közti összefüggések levezetését is jelentékenyen megkönnyíti.

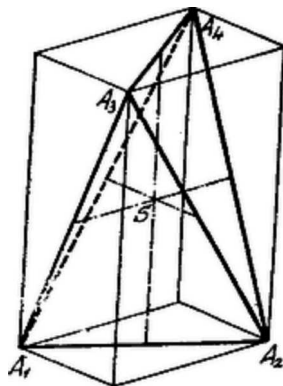


Fektessünk a tetraéder minden egyes élén át a szembenfekvő éllel párhuzamos síkot. Az így nyert hat sík közül kettő-kettő nyilván párhuzamos, tehát paralelepipedont alkotnak. A paralelepipedon bármely lapjának átlói a tetraédernek két szembenfekvő élével egyenlők és párhuzamosak. A tetraéder két szemközti élének felezőpontjait összekötő távolságokat nevezzük Klug Lipót nyomán röviden *éltengelynek*. Egy éltengely nyilván a paralelepipedon szembenfekvő lapjainak középpontjait köti össze, tehát az éltengelyek a körülírt paralelepipedon megfelelő élével egyenlők és párhuzamosak és egymást egy pontban, a közös felező pontjukban metszik.¹ Ezen pont egyszersmind a tetraéder súlypontja.

Ki fogjuk mutatni, hogy a fent említett tetraéderfajok a körülírt paralelepipedon segítségével a következő módon jellemezhetők.

I. Egy tetraéder akkor és csak akkor egyenlőlapú, ha a körülírt paralelepipedon derékszögű.

II. Egy tetraédernek akkor és csak akkor van magasságpontja, ha a körülírt paralelepipedon egyenlő élű.



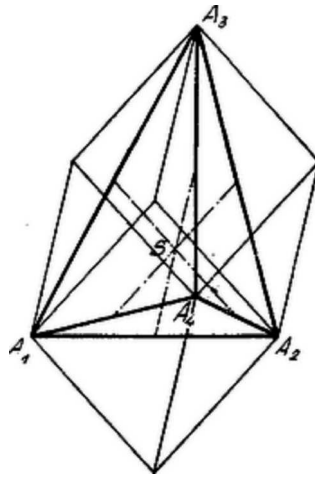
I. Ha az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek pl. az $A_1A_2A_3$ és $A_1A_2A_4$ lapjai egyenlő területűek, úgy az A_3 és A_4 csúcsok az A_1A_2 éltől egyenlő távol vannak, tehát az A_1A_2 és A_3A_4 élek normális transzverzálisa az A_3A_4 élt felezi². Ha a

¹ L. folyóiratunk II. évf. 101., 130., 161. o. (Kárteszi F.: A tetraéderről.) (Lásd 1925/12. 101. old., 1926/1. 130. old., 1926/2. 161. old. – A szerk.)

² Ha az e egyenes a vele nem párhuzamos f egyenesnek A és B pontjaitól egyenlő távolságra van, úgy az e és f normális transzverzálisa az AB távolságot felezi.

tetraéder egyenlő lapú, azaz mind a négy lap ugyanakkora területű, úgy az előbbi megfontolásból következik, hogy mindegyik szemben levő élpár normális transzverzálisa felezi az éleket. Más szóval az éltengelyek egybeesnek a normális transzverzálisokkal, a körülírt paralelepipedonnak az éltengelyekkel párhuzamos élei merőlegesek a szemközti tetraéder éllel párhuzamos paralelepipedonlapokra, azaz a körülírt paralelepipedon derékszögű.

Míntehogy pedig a derékszögű paralelepipedont határoló téglalapok átlói egyenlők, tehát az egyenlőlapú tetraéder szemben levő élei egyenlők és ennek következtében a lapjai egybevágók.



II. Ha az $A_1A_2A_3A_4$ tetraédernek, pl. az $\overline{A_1H_1}$ és $\overline{A_2H_2}$ magasságai metszik egymást egy H pontban, úgy

$$\overline{A_1H_1} \perp A_2A_3A_4 \text{ és } \overline{A_2H_2} \perp A_1A_3A_4.$$

Tehát az $\overline{A_3A_4}$ él merőleges a két magasságot tartalmazó A_1A_2H síkra, következésképp az abban fekvő $\overline{A_1A_2}$ élre is. Ha mind a négy magasság a H pontban találkozik, úgy az előbbi megfontolásból következik, hogy a szemben levő élpárok egymásra merőlegesek. E szerint a körülírt paralelepipedon lapátlói, melyek a tetraéder szembenfekvő élpárjaival párhuzamosak, szintén merőlegesek egymásra, tehát a lapok rombuszok, azaz a körülírt paralelepipedon egyenlőélű.

A tétel megfordítását, miszerint ez egyenlőélű paralelepipedonba írt tetraéder magasságai egy pontban találkoznak, a következő, a tetraéderrel kapcsolatos gömböket tárgyaló fejezetben fogjuk közvetlenül bizonyítani.

A következőkben egymással szembeállítjuk az egyenlőlapú és a magasságponttal bíró tetraéderek nevezetesebb tulajdonságait a kettő közt fennálló reciprocitás kihangsúlyozása céljából.

Az egyenlőlapú tetraédernél a körülírt paralelepipedon derékszögű tehát:
az éltengelyek egymásra merőlegesek;
az éltengelyek merőlegesek a szembenfekvő élpárookra,
a szembenfekvő élek egyenlő hosszúak,
a magasságok egyenlő hosszúak.

A magasságponttal bíró tetraédernél a körülírt paralelepipedon egyenlőélű, tehát:
az éltengelyek egyenlő hosszúak,
a szembenfekvő élpárok négyzetösszegei egyenlők egymással és az éltengely négyzetének négyszeresével,
a szembenfekvő élek egymásra merőlegesek.

Tudvalevőleg minden háromszöghöz tartozik egy beírt és egy körülírt kör, hasonlóképp minden tetraédernek van körülírt és beírt gömbje. Egyenlőlapú tetraédernél az éltengelyek metszéspontja (azaz a súlypont), egyenlő távolságban van a körülírt derékszögű paralelepipedon valamennyi csúcsától: ezek között vannak a tetraéder csúcsai is. Tehát a tetraéder súlypontja egyszersmind a körülírt gömb középpontja. Míntehogy pedig a magasságok egyenlők, a súlypont egyenlő távolságban van a tetraéder lapjaitól és így a beírt gömbnek is középpontja.

A háromszög Feuerbach-féle körének azonban csak a magassági ponttal bíró tetraédernél van analogonja.

3

Fentebb kimutattuk, hogy a magasságponttal bíró tetraéder éltengelyei egyenlők. Ha tehát ezek közös felezési pontja körül, közös hosszuk felével, mint sugárral, gömböt szerkesztünk, ez a gömb átmegy mind a hat él felezőpontján, tehát tartalmazza a tetraéderlapok Feuerbach-féle körét és így természetesen a lapmagasságok talppontjait is.

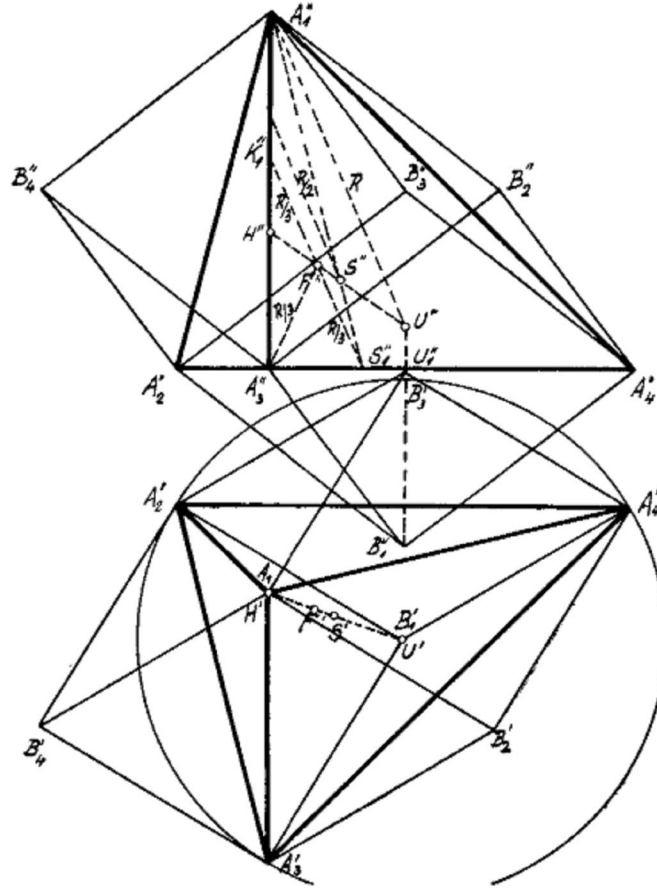
A tetraéderhez tartozó további gömbök tárgyalása céljából először levezetjük a következő tételt:

Egyenlőélű paralelepipedonba írt tetraéder magasságai egy pontban találkoznak és ez a magasságpont a körülírt gömb középpontjának a súlypontra vonatkozó tükörképe.

Jelöljük az egyenlőélű paralelepipedonba írt tetraéderhez tartozó csúcsait A_1, A_2, A_3, A_4 , a többit B_1, B_2, B_3, B_4 -gyel. Ekkor a tetraéderhez nem tartozó bármelyik, pl. a B_1 csúcsból a megfelelő $A_2A_3A_4$ lapra bocsátott merőleges

³ Az éltengely két szembenfekvő él felezési pontjait, azaz az egyenlőélű paralelepipedon két párhuzamos lapjának középpontjait köti össze. Ezért az éltengely a paralelepipedon élével, vagyis egy rombus oldalával egyenlő, míg a szembenfekvő élek ezen rombus átlóival egyenlők. (L. a 393. feladatot, V. évf. 54. o. – 1928/10. 54. old.)

U_1 talppontja a három egybevágó $B_1U_1A_2$, $B_1U_1A_3$, $B_1U_1A_4$ derékszögű háromszöget határozza meg, úgy hogy $U_1A_2 = U_1A_3 = U_1A_4$, tehát a B_i csúcsokból a megfelelő tetraéderlapra bocsátott merőlegesek a tetraéderlapok köré írt körök U_i középpontjain mennek át, vagyis egymást a körülírt gömb U középpontjában metszik. Ennélfogva a B_i pontokkal az S súlypontra vonatkozólag szimmetrikusan fekvő A_i tetraéder csúcsokból a megfelelő tetraéderlapokra bocsátott merőlegesek: a magasságok, szintén egy H pontban találkoznak. A beírt tetraédernek tehát van magasságpontja és ez a H magasságpont nyilván U -nak S -re vonatkozó tükröképe.



Ebből az ábra szerint azonnal következik, hogy S körül $R/2$ sugárral leírt gömb a felső magasságmetsetek középpontjain megy át. Itt R a tetraéder köré írt gömb sugarát jelenti.

Ha a tetraéder mindegyik csúcsába egy, a magasságpontba két tömegegységet helyezünk, az így nyert tömegrendszer súlypontja a HS távolság azon F pontja, melyre $\overline{SF} : \overline{FH} = 2 : 4$.

Ha továbbá a fenti tömegekből a két egyenlő tömegű $(A_1) + (H) + (H)$ és $(A_2) + (A_3) + (A_4)$ csoportot alkotjuk, úgy $(A_2) + (A_3) + (A_4)$ súlypontja az $A_2A_3A_4$ tetraéderlap S_1 súlypontja, $(A_1) + (H) + (H)$ súlypontja a $\overline{A_1H}$ felső magasságmetset egyharmadában levő K_1 pont,⁴ a közös F súlypont felezi az S_1K_1 távolságot tehát S_1 -től és K_1 -től, valamint nyilván a $S_1K_1H_1$ derékszögű háromszög H_1 csúcsától is $R/3$ távolságra van,⁵ azaz:

A magasságponttal bíró tetraédernél a súlypont és magasságpont közti távolságot 1 : 2 arányban osztó F pont körül $R/3$ sugárral leírt gömb átmegy a lapok súlypontjain, a magassági talppontokon és a felső magasságmetsetek harmadában levő osztáspontokon.

Budapest, 1937.

Egerváry Jenő

⁴ $HK_1 = \frac{1}{3}HA_1$.

⁵ Ugyanis $HF = \frac{2}{3}HS = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}HU = \frac{1}{3}HU$ és $HK_1 = \frac{1}{3}HA_1$; tehát $FK_1 = \frac{1}{3}UA_1 = \frac{1}{3}R$.