

Folyóiratunk XIII. évfolyamának 8. számában a „Sokszögekre vonatkozó szélsőérték feladatokról” című közlemény bizonyos – zárt konvex görbékkel kapcsolatos – szélsőérték tulajdonságú sokszögekkel foglalkozik.

Bebizonyítja, hogy:

1. A zárt konvex görbébe írható maximális területű n -szögre fennáll, hogy a görbéhez bármelyik csúcspontjában húzott érintő párhuzamos a két szomszédos csúcsponton átfektetett szelővel.
2. A zárt konvex görbe körül írható minimális területű n -szög bármely oldalát az érintési pont felezi.
3. A zárt konvex görbét területileg legjobban megközelítő n -szög minden oldalát saját felezőpontja és a görbével való két metszéspontja négy egyenlő részre osztja.

Ezen háromféle extrém sokszöget azonban a fenti egy-egy tulajdonságuk nem határozza meg, azaz a fenti feltételek tetszősszerűn zárt konvex görbe esetén szükségesek, de nem elégségesek. Azonban kör esetében elégségesek is.

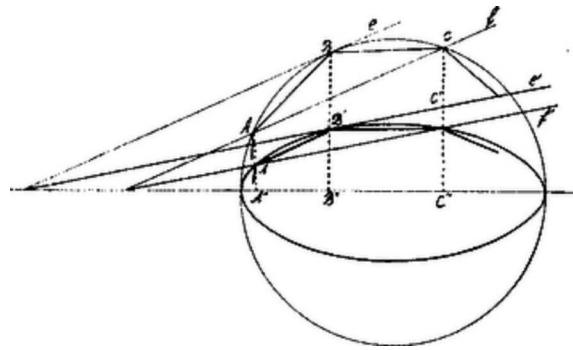
A következőkben bebizonyítjuk, hogy ezen szükséges feltételek ellipszis esetén is elégségesek.

A) Meghatározandó az ellipszisbe írható legnagyobb területű n -szög.

Először megrajzoljuk a főkört és megszerkesztjük a főkörbe írható szabályos n -szöget. Ezen n -szög affin megfelelője lesz az ellipszisbe írható legnagyobb területű n szög. (Az affinitásról részletesen I. XI. évfolyamunk 241. o.) Ilyen n szög azonban végtelen sok van. Ugyanis a körbe írt szabályos n -szög elforgatható és minden helyzetében megszerkeszthetjük az affin megfelelőjét.

a) Ezen n -szögek és csakis ezek mindegyike tesz eleget az 1. szükséges feltételnek. Ugyanis a körbe írt szabályos sokszög egyik csúcában húzott érintő, az e egyenes párhuzamos a szomszédos csúcsokat összekötő f egyenessel (1. ábra); tehát e' és f' , az affin megfelelőjük is párhozamosak.

b) Ezen n -szögek területe egyenlő és nagyobb területű n -szög nem írható az ellipszisbe.



1. ábra

Bontsunk ugyanis fel egy ilyen n -szöget trapézokra az 1. ábrán látható módon. (A körbe írható szabályos n -szög csúcspontjaiból bocsássunk merőlegest a nagy tengelyre). Akkor bármely két megfelelő trapéz területének viszonya, pl.:

$$\frac{AA''BB''}{A'A''B'B''} = \frac{\frac{A''B''}{2}(AA'' + BB'')}{\frac{A''B''}{2}(A'A'' + B'B'')} = \frac{a}{b},$$

ahol a az ellipszis fél nagy tengelyét, b a fél kis tengelyét jelenti.

Ezért a trapézok összegére, azaz az $(ABC \dots)$ és $(A'B'C' \dots)$ n -szögre is fennáll, hogy:

$$\frac{T_n^k}{T_n^e} = \frac{a}{b},$$

ahol T_n^k a körbe írt n -szög, T_n^e pedig ez ellipszisbe írható megfelelő n -szög területét jelenti. Mivel $\frac{a}{b}$ és T_n^k állandók, tehát:

$$I. \quad T_n^e = T_n^k \frac{a}{b} \dots$$

szintén állandó.

Nagyobb területű n -szög nem írható az ellipszisbe, mert különben az I. alapján a körbe is lehetne a szabályos n -szögnél nagyobb területű n szöget írni, már pedig a körbe írható n -szögek közül a szabályos n -szög területe a legnagyobb.

Az 1. szükséges feltétel ellipszis esetén tehát elégséges is.

B) Meghatározandó az ellipszis köré írható legkisebb területű n -szög.

Az ellipszis köré írható legkisebb területű n szög a főkör köré írt szabályos n -szög affin megfelelője.

a) Csakis ezekre nézve áll fenn, hogy az érintési pont az oldalakat felezi. Ugyanis kör esetén ilyen tulajdonsággal csak a köré írható szabályos n -szög rendelkezik. Tehát csak ennek affin megfelelője rendelkezik szintén ilyen tulajdonsággal. (L. a 2. ábrán).

