

a) A XL. Eötvös Loránd matematikai tanuló-verseny tételei

I.

Bebizonyítandó, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{2}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

I. Megoldás.

$$\text{Ha } n = 1, \quad \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$n = 2 \text{ mellett } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} n = 3 \text{ esetben } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a tétel igaz n -re, azaz

$$S_n \equiv \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Kimutatjuk, hogy a tétel igaz $n+1$ -re is. Ugyanis

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\equiv S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Azonban } \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Ennek tekintetbe vételével, az egyenlet jobboldalán elmarad $\frac{1}{n+1}$

$$\text{sgy } S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$

azaz S_{n+1} képezésének törvénye megegyezik S_n törvényével.

Mínt hogy a tétel igaz, ha $n = 1, 2, 3$, igaz az n bármely értéke mellett.

Almássy György (Kegyesrendi g. VIII. o. Veszprém).

II. Megoldás. Mínt hogy (az előbbieik szerint)

$$\frac{1}{(2x-1)2x} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{x},$$

a bebizonyítandó egyenlőség baloldala

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} \right) - \sum_1^n \frac{1}{x}$$

alakban írható. Azonban

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x} \right) = \sum_1^{2n} \frac{1}{x},$$

mert $\sum_1^n \frac{1}{2x-1}$ a $2n$ -nél kisebb páratlan számok reciprok értékeinek és

$\sum_1^n \frac{1}{2x}$ $2n$ -nél nem nagyobb páros számok reciprok értékeinek összege és így a két összeg együttesen az 1-től $2n$ -ig haladó összes egész számok reciprok értékeinek összege. Eszerint a szóbanforgó összeg valóban

$$\sum_1^{2n} \frac{1}{x} - \sum_1^n \frac{1}{x} = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{x} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Harsányi János, (Ág. ev. g. VIII. o. Bp).

II.

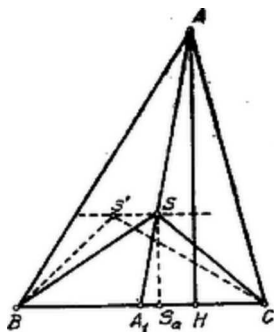
Legyen az ABC Δ -ön belül választott S pont oly tulajdonságú, hogy az ABS , BCS , CAS háromszögek megegyező területűek. Bebizonyítandó, hogy S az $ABC\Delta$ súlypontja.

I. Megoldás. A háromszög S súlypontja az AA_1 , BB_1 , CC_1 , oldalfelező transzverzálisoknak (súlyvonalak) közös pontja.

Az AA_1 súlyvonal az $ABC\Delta$ -et és a $BCS\Delta$ -et is két egyenlő területű részre osztja.

Az $ABC\Delta$ két része: ACA_1 és ABA_1 területre egyenlők, mert alapjuk egyenlő: $A_1C = A_1B$ és ehhez tartozó magasságuk, AH , közös.

A $BCS\Delta$ két része: BSA_1 és CSA_1 területre egyenlők, mert alapjuk egyenlő: $A_1C = A_1B$ és ehhez tartozó magasságuk, SS_a közös.



Ebből következik, hogy az ABA_1 és BSA_1 háromszögek területének különbsége egyenlő az ACA_1 és CSA_1 háromszög területének különbségével, azaz

$$t_{ABS} = t_{CAS}.$$

Hasonlóan következik, a BB_1 súlyvonal segítségével, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS}.$$

Eszerint a háromszög S súlypontja oly tulajdonságú, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} = \frac{1}{3}t_{ABC}.$$

Tegyük fel, hogy volna még egy S -től *különböző* S' pont, amely ugyanolyan tulajdonságú, mint S , azaz

$$t_{ABS'} = t_{BCS'} = t_{CAS'} = \frac{1}{3}t_{ABC}.$$

Ebben az esetben $t_{ABS'} = t_{ABS}$; ez csak úgy lehetséges, hogy mivel e két háromszögnek közös alapja van, ha a magasságuk is egyenlő, vagyis $SS' \parallel AB$.

Ugyanígy $t_{BCS'} = t_{BCS}$; ebből pedig $SS' \parallel BC$.

Azonban $SS' \parallel AB$ és $SS' \parallel BC$ ellentmondás.

Tehát más pont, mint az S súlypont, nem bírhat a szóbanforgó tulajdonsággal.

II. Megoldás. Az S súlypont tulajdonságát előbb bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az S -től *különböző* S' pont ugyanolyan tulajdonságú, mint az S súlypont. Ezen S' pont akkor beleesik pl. az $ABS\Delta$ -be (ill. ennek AS vagy BS oldalára). Ekkor pedig

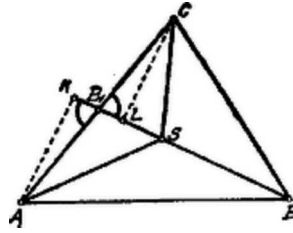
$$t_{ABS'} < t_{ABS} \quad \text{azaz} \quad t_{ABS'} < \frac{1}{3}t_{ABC}.$$

Kell tehát, hogy $t_{BCS'}$, vagy $t_{CAS'}$ nagyobb legyen, mint $\frac{1}{3}t_{ABC}$, azaz: S' nem bonthatja fel az $ABC\Delta$ -et három egyenlő területű részre.

Kemény György (áll. Szent István rg. VII. o. Bp. XIV.)
Oroszhegyi Szabó Lajos (Kegyesrendi g. VIII. o. Bp. IV.)

III. Megoldás. Ha a BCS és ABS háromszögek területe egyenlő, akkor, mivel BS -t közös alapnak tekinthetjük, kell, hogy az ehhez tartozó magasságok is egyenlők legyenek: $AK = CL$. Ebből azonban következik, hogy ha BS az AC -t a B_1 -ben metszi, $AB_1K \Delta \overset{\infty}{\sim} B_1L\Delta$. Ugyanis $\angle K = \angle L = 90^\circ$, továbbá az AK és CL befogókkal szembenfekvő szögek, mint csúcsszögek, egyenlők.

Ebből következik: $AB_1 = CB_1$ azaz az S pont a BB_1 oldalfelezőn (súlyvonalon) fekszik.



Hasonló megfontolással következik, hogy S az AA_1 ill. CC_1 oldalfelezőjén is rajta fekszik, tehát S a háromszög súlypontja.

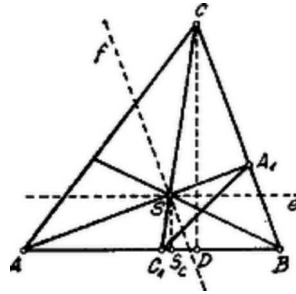
Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály r. VII. o. Debrecen).

IV. Megoldás. Legyen az S pont olyan tulajdonságú, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} = \frac{1}{3}t_{ABC}.$$

Az ABS és ABC háromszögeknek közös alapja AB ; az elsőnek magassága SS_c , a másodiké $CD = m_c$. Minthogy

$$t_{ABS} = \frac{1}{3}t_{ABC}, \quad \text{kell, hogy} \quad SS_c = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}m_c \quad \text{legyen.}$$



Eszerint kell, hogy S az AB oldallal párhuzamos e egyenesen fekszen, melynek távolsága AB -től $\frac{1}{3}m_c$.¹

Hasonlóan S a BC oldallal párhuzamos f egyenesen is fekszik, melynek távolsága BC -től $\frac{1}{3}m_a$.

e és f egyenesek meghatározzák az S pontot. Azt kell még kimutatnunk – és ez elegendő is – hogy AS és CS súlyvonalak.

Húzzuk meg az AS egyenest, mely BC -t az A_1 , továbbá a CS egyenest, mely AB -t a C_1 pontban metszi. Nyilván

$$SA_1 = \frac{1}{3}AA_1 \quad \text{és} \quad SC_1 = \frac{1}{3}CC_1$$

ill.

$$AS : SA_1 = 2 : 1 \quad \text{és} \quad CS : SC_1 = 2 : 1, \quad \text{azaz} \quad AS : SA_1 = CS : SC_1.$$

Ebből következik, hogy $ASC\Delta \sim A_1S_1C\Delta$, mert: az S csúcsnál egyenlő szögük van és ezen szöget bezáró oldalak aránya egyenlő. Kimondhatjuk tehát, hogy $SA_1C_1\Delta \sim SAC\Delta$,

ill.

$$A_1C_1 \parallel AC \quad \text{és} \quad A_1C_1 = \frac{1}{2}AC.$$

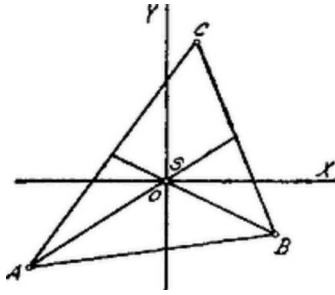
Ez azonban azt jelenti, hogy A_1 a BC , C_1 az AB oldal felezőpontja: AA_1 és CC_1 súlyvonalak és így S az $ABC\Delta$ súlypontja.

Kádár Géza (Dobó István r. VII. o. Eger)

V. Megoldás. Derékszögű koordináta-rendszerünk kezdőpontját helyezzük abba az S pontba, amelyre nézve

$$(1) \quad t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} \dots$$

¹Ilyen egyenes kettő van: azt kell vennünk, mely az AB azon oldalán fekszik, amelyen a C csúcs.



Az A, B, C csúcsok a pozitív forgás irányában következnek egymás után, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ koordinátákkal. Így az 1) feltétel

$$(2) \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \dots$$

alakban írható és innen

$$(2a) \quad (x_1 + x_3) y_2 = (y_1 + y_3) x_2 \dots$$

ill.

$$(2b) \quad (x_2 + x_1) y_3 = (y_2 + y_1) x_3 \dots$$

vagy még

$$(2c) \quad (x_3 + x_2) y_1 = (y_3 + y_2) x_1 \dots$$

Már most ezen összefüggések azonosak a következőkkel:

$$(3a) \quad (x_1 + x_2 + x_3) y_2 = (y_1 + y_2 + y_3) x_2 \text{ azaz } \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \dots$$

$$(3b) \quad (x_1 + x_2 + x_3) y_3 = (y_1 + y_2 + y_3) x_3 \quad , \quad \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \dots,$$

$$(3c) \quad (x_1 + x_2 + x_3) y_1 = (y_1 + y_2 + y_3) x_1 \quad , \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \dots$$

A (3a), (3b), (3c) egyenletek azonban azt fejezik ki, hogy az SB, SC, SA egyenesek keresztül mennek a háromszög súlypontján, mert

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

a háromszög súlypontjának koordinátái. Tehát S pont a háromszög súlypontja.

Jegyzet. A felsorolt megoldásokon kívül még számos dolgozat érkezett, különösen a IV. megoldásra, amelyek nem voltak figyelembe vehetők. Ugyanis ezen dolgozatok éppen azt mellőzik, amit bizonyítanunk kell. Nem szabad egyszerűen azt állítani, hogy mivel az S pontra nézve $SS_c = \frac{3}{1} m_c$ s. í. t., ez az S pont nem lehet más, mint a súlypont.

Ugyancsak nem voltak figyelembe vehetők az analitikai módszerrel dolgozók közül azok, amelyek a szóbanforgó területek egyenlőségének felírása után kijelentik, hogy az egyenletrendszer megoldása

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Valóban ezen megoldás sok és kényelmetlen számíttással járna. Ebből csak az a tanulság, hogy kerüljük az ilyen eljárásokat. Helyesen jártak el azok, akik a koordinátarendszer kezdőpontját a háromszög egyik csúcsába, az egyik tengelyen pedig a háromszög egyik oldalát helyezték el.

III.

Legyen „a” egy tetszőlegesen adott pozitív egész szám. Bebizonyítandó, hogy mindig van egy és pedig csakis egy pozitív egész x, y számokból álló (x, y) számpár, amelyre

$$x + \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2} = a.$$

I. Megoldás. Legyen

$$(1) \quad x + y - 1 = k, \quad \text{tehát} \quad x + y - 2 = k - 1 \dots$$

és vizsgáljuk az adott a számnak a

$$(2) \quad \frac{k(k-1)}{2} \dots$$

alakú egész számok sorához viszonyított helyzetét.¹

Két eset lehetséges: a vagy előfordul ezen számok sorában, vagy a számsor két tagja között van.

Az első esetben a k poz. egész szám megállapítható úgy, hogy

$$a = \frac{(k+1)k}{2}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{(k+1)k}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = k$$

és ekkor, mivel $x + y - 1 = k$, $x = k$ mellett $y = 1$, tehát egyenletünket a $(k, 1)$ számpár kielégíti.

A második esetben k meghatározható úgy, hogy

$$(3) \quad \frac{k(k-1)}{2} < a < \frac{(k+1)k}{2}, \dots$$

és ekkor

$$0 < x < k, \quad \text{t. i.} \quad x = a - \frac{k(k-1)}{2} = \alpha,$$

azaz létezik egy $x = \alpha$ poz. egész szám úgy, hogy $1 \leq \alpha < k$,

és így

$$y = k + 1 - \alpha > 0,$$

egyenletünket tehát az $(a, \overline{k+1-\alpha})$ számpár elégíti ki.

A két eset egybefoglalásával mondhatjuk: $1 \leq \alpha \leq k$.

Már most azt kell kimutatnunk, hogy egyenletünket több pozitív egész számokból álló számpár nem elégítheti ki.

Nézzük tehát az a számnak a 2) sorozat azon tagjaihoz való helyzetét, melyek $\frac{k(k-1)}{2}$ -t megelőzik!¹ Így

$$a = \frac{k(k-1)}{2} + \alpha = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 + \alpha,$$

azaz most

$$x = k - 1 + \alpha > 0;$$

azonban, mivel

$$\begin{aligned} x + y - 1 &= k - 1, \\ y = k - x &= k - (k - 1 + \alpha) = 1 - \alpha \leq 0, \end{aligned}$$

tehát már nem kapunk *pozitív* y -t.

Általában, mivel

$$a = \frac{k(k-1)}{2} + \alpha = \frac{(k-i)(k-i-1)}{2} + \alpha + (k-1) + (k-2) + \dots + (k-i)$$

és $i < k$,

azért

$$x = \alpha + ik - \frac{i(i+1)}{2} > 0.$$

Azonban most

$$x + y - 1 = k - i,$$

tehát

$$\begin{aligned} y &= 1 + (k-i) - x = 1 + (k-i) - \alpha - ik + \frac{i(i+1)}{2}, \\ y &= 1 - \alpha - (i-1) \left(k - \frac{i}{2} \right) < 0. \end{aligned}$$

¹E sorozat tagjai: 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ...

másodrendű számtani haladványt alkotnak, az egymásután következő tagok különbségei 1, 2, 3, 4, 5, ... elsőrendű számtani haladványt.

¹Ha azokat tekintjük, amelyek $\frac{k(k-1)}{2}$ után következnek, akkor már $x < 0$.

II. Megoldás. Ha be tudjuk bizonyítani, hogy a pozitív egész x, y számokból (x, y) számpár összes leheto változatainak megfelelo rendezesével

$$f(x, y) \equiv x + \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2}$$

kifejezés a pozitív számsor összes egész számait adja, 1-től kezdődőleg, egyszer és csak egyszer, akkor bebizonyítottuk, hogy mindig van egy és csakis egy pozitív egész (x, y) számokból álló (x, y) számpár, amely a követelménynek megfelel. Legyen ugyanis $x + y = c$, állandó, akkor $f(x, y) = a$ csak az x -től függ úgy, hogy amint x növekedik egy-egy egységgel, úgy növekedik a is egy-egy egységgel. Tehát az (x, y) számpár ama változataihoz, melyek az $x + y = c$ feltételnek megfelelnek, a pozitív egész számsor egymásután következő tagjainak egy bizonyos része felel meg egyszer és csak egyszer.¹

Ha bebizonyítjuk, hogy az (x, y) számpár változatainak következő csoportjához, amelyre nézve $x + y = c + 1$, a pozitív egész számsornak az előbbieket közvetlenül követő csoportja felel meg, akkor beláthatjuk, hogy ha az (x, y) számpár változatait így rendszerezve helyettesítjük $f(x, y)$ kifejezésbe, akkor valóban a pozitív egész számok teljes sorát kapjuk, egymásután, egyszer és csak egyszer, 1-től kezdődőleg. Ugyanis, ha $x = 1, y = 1$, akkor $a = 1$.

Az $x + y = c$ csoport utolsó számpárja az $x = 1, 2, \dots, c - 1$ sorrendben haladva $(c - 1, 1)$. $x > c$ nem lehet, mert akkor $y \leq 0$. A következő $x + y = c + 1$ csoport első számpárja $(1, c)$.

A $(c - 1, 1)$ számpárral

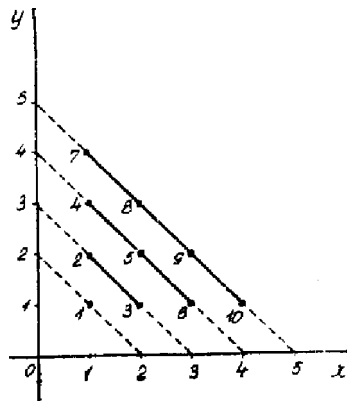
$$f(x, y) = c - 1 + \frac{(c - 1)(c - 2)}{2}, \text{ azaz } a_1 = \frac{c^2 - c}{2}.$$

Az $(1, c)$ számpárral

$$f(x, y) = 1 + \frac{c(c - 1)}{2} \text{ azaz } a_2 = 1 + \frac{c^2 - c}{2}$$

tehát

$$a_2 = a_1 + 1.$$



Látjuk ebből, hogy az $x + y = c$ csoport utolsó számpárjának megfelelo egész szám a_1 és az utána következő egész szám, a_2 , tényleg a következő csoport első (x, y) számpárjához tartozó szám.

Ezzel tehát állításunkat bebizonyítottuk. Minthogy $x + y = c$ oly egyenesnek egyenlete, mely a tengelyekről c darabot vág le, ezen egyenesek mentén fekszenek az (x, y) számpárokhoz tartozó a egész számok. A kezdő szám $a = 1$ az $x + y = 2$ egyenesen fekszik. Az $x + y = c$ egyenesnek a tengelyeken fekvő pontjai már nem határoznak meg a számot.

Weisz Alfréd (Bolyai r. VII. o. Bp. V.)

¹Ezen tagok száma: $c - 1$, mert, ha $x + y = c$, akkor $x = 1, 2, \dots, c - 1$