

1. Jelentsen K az alábbiakban egy csúcspont nélküli zárt konvex síkgörbét. Tekintsük a K -ba írható legnagyobb területű háromszöget.¹ Ez a háromszög legjobban közelíti meg K területét oly értelemben, hogy az eltérés K és a háromszög területe között erre a legkisebb az összes K -ba írható háromszögek közül.

Kérdés mármost, hogy ez a legjobban approximáló – vagy mint mondani szokás extrém – háromszög milyen tulajdonsággal bír?

Nem egyszerű feladat mindazon tulajdonságot megadni, amelyek egyértelműen meghatározzák a háromszöget; másszóval: megadni a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy valamely K -ba írt háromszög maximális területű legyen. Könnyű ezzel szemben erre egy igen jellemző, de pusztán szükséges feltételt találni, amelyet általánosabb alakban adunk meg:

A K -ba írható legnagyobb területű n -szög bármely csúcspontjában a K -hoz húzott érintő párhuzamos a két szomszédos csúcsponton át fektetett szelővel.

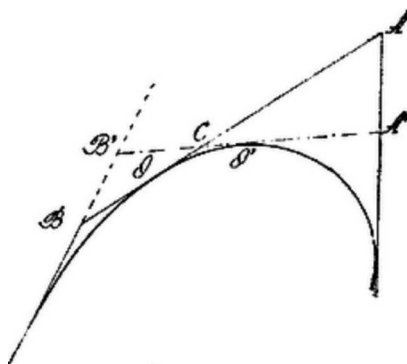
Tegyük fel u. i., hogy valamely K -ba írt n -szög nem bír ezzel a tulajdonsággal. Hagyjuk ekkor változatlanul az n -szög $n - 1$ csúcspontját, az n -ediket azonban hozzuk a fent megjelölt helyzetbe. A sokszög területe ezzel nyilván növekedett.

Az alábbiakban hasonlóan fogunk eljárni. Jellemezni fogjuk az extrém sokszöget bizonyos tulajdonsággal. Nem vizsgáljuk azonban, hogy valamely polygon, mely ilyen tulajdonsággal bír, vajon extrém sokszög-e?

2. *A K köré írható legkisebb területű n -szög minden oldalát a K -val való érintési pontja felezi.*

Ennek, valamint az ezt követő tételnek a bizonyításánál felhasználunk egy, az analízisben gyakran szereplő segéd-tételt:

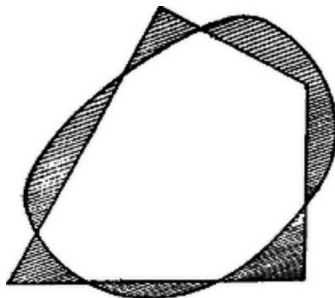
Legyenek $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ x_0 környezetében folytonos függvények. Ha most $\varphi(x)_0 < \psi(x_0)$, akkor megadható egy pozitív h szám, úgy, hogy $\varphi(x) < \psi(x)$, valahányszor $|x - x_0| < h$.



1. ábra

Vegyünk ezután tekintetbe egy polygont, melynek egyik AB oldalát az O érintési pont nem felezi: $\overline{AO} > \overline{OB}$. (1. ábra.) Válasszunk AO -on egy C pontot O -hoz oly közel, hogy $AC > CB$. A C -ből húzott érintőnek a szomszédos oldallal ill. annak meghosszabbításával való metszéspontja legyen A' ill. B' . Mivel $\overline{A'C}$ ill. $\overline{CB'}$ az $\overline{OC}$ távolsággal folytonosan változik, választhatjuk segédételünk alapján C -t úgy, hogy $\overline{A'C} > \overline{CB'}$ legyen. Ekkor azonban területüket illetőleg: $CBB' \Delta < CAA' \Delta$.

Ha tehát AB -t a többi oldal érintési pontjainak változatlanul hagyása mellett $A'B'$ -vel helyettesítjük, akkor az így előálló sokszög területe az eredetivel szemben csökken. U. i. az új sokszög területéből $CAA' \Delta$ kiesik, ellenben hozzájárul a $CBB' \Delta$; a kiesés nagyobb, mint a növekedés.



2. ábra

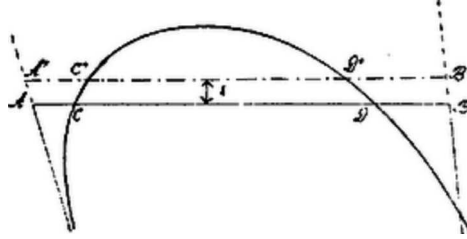
¹ A szélső érték existenciája ebben az esetben – valamint a következőkben – Weierstrassnak egy nevezetes tételéből folyik.

3. 1.-ben a K -ba, 2.-ben a K köré írt n -szögek közül vizsgáltuk azt, melyre a polygon és K közt lévő terület minimális. Most a polygonra semmi kikötést nem téve, fogjuk jellemezni azt az n -szöget, melyre ez a „területi eltérés” (2. ábrán a vonalkázott síkrész területe) a lehető legkisebb.

A K -t terület szempontjából legjobban megközelítő n -szög minden oldalát saját felezőpontja és K -val való két metszéspontja négy egyenlő részre osztja.

Könnnyen belátható, hogy az extrém polygon K -t, tételünknek megfelelően, valóban kétszer metszi. Tegyük tel pl., hogy valamelyik oldal teljes egészében K -n kívül van. Ezt az oldalt a vele párhuzamos érintővel helyettesítve, az eltérés csökken. Hasonlóan csökkenthető az eltérés, ha valamely oldal végpontjaival együtt K belsejében van. Nézzük most azt az esetet, amidőn valamely oldal egyik végpontja K -n kívül, a másik K -n belül van. Forgassuk el ezt az oldalt K -val való metszéspontja körül addig, amíg a belső végpont K -ra nem ér. Az eltérés ezáltal ismét csökken.

Az az eset azonban, melynél valamely oldal K -t érinti, vagy végpontja K -n van, határeseteké azok, amelynél két metszéspont van. Erre (lényegtelen módosítással) az alábbi bizonyítást alkalmazhatjuk.



3. ábra

Legyen tehát AB valamely n -szög egyik oldala, melyre – feltevésünkkel ellentétben – pl. $\overline{AC} + \overline{DB} < \overline{CD}$, hol C és D AB -nek K -val való metszéspontjai. (3. ábra.) Toljuk el ekkor AB -t magával párhuzamosan h távolsággal $A'B'$ -be. Az új metszéspontok legyenek C' , ill. D' . Mivel $\overline{A'C'}$, $\overline{C'D'}$, valamint $\overline{D'B'}$ h -nak folytonos függvénye, választhatom h -t úgy, hogy $h > 0$, és $\overline{A'C'} + \overline{D'B'} < \overline{C'D'}$. Ezért:

$$\overline{AC} + \overline{DB} + \overline{A'C'} + \overline{D'B'} < \overline{CD} + \overline{C'D'}$$

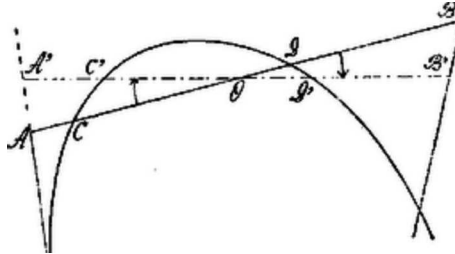
tehát

$$\frac{\overline{AC} + \overline{A'C'}}{2} h + \frac{\overline{DB} + \overline{D'B'}}{2} h < \frac{\overline{CD} + \overline{C'D'}}{2} h.$$

Ha most az egyenesvonalú trapézok helyett a megfelelő vegyes vonalú trapézok területét vesszük, még inkább áll:

$$ACA'C' + DBB'D' < CDD'C'.$$

Az eltolást alkalmas irányban végezve $ACA'C' + DBB'D'$ a területi eltérés növekedését, $CDD'C'$ a csökkenését jelenti. Ha tehát $\overline{AC} + \overline{DB} \neq \overline{CD}$, akkor az eltérés csökkenthető.



4. ábra

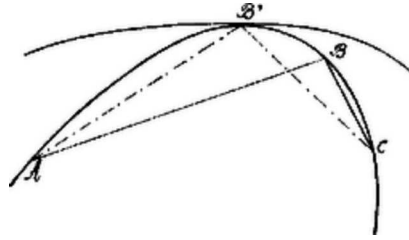
Tegyük fel mármost, hogy $\overline{AC} + \overline{DB} = \overline{CD}$, de – a feltétellel ugyancsak ellentétben – pl. $\overline{AC} < \overline{DB}$ (4. ábra.). Az eltérést ebben az esetben AB -nek alkalmasan választott O pontja körüli elforgatásával kisebbíthetjük. Válasszuk O -t AB -n úgy, hogy $OA'A\Delta = OB'B\Delta$. A K görbe és a polygon közötti eltérés ezáltal egyrészt növekszik, másrészt csökken. Az elforgatást az ábrán megjelölt irányban végezve, a növekedés: $ODD' + ACA'C'$; a csökkenés: $OC'C + DB'BD$. $A'B'$ -nek AB -hez elég közel való választásával az O pont tetszésszerűen közel juthat AB felezési pontjához. Választhatjuk tehát O -t úgy, hogy $OD < OC$, sőt – ismét a folytonosságra hivatkozva – úgy, hogy $ODD' < OC'C$. Ekkor azonban:

$$C'A'AC + ODD' < D'B'BD + OCC'$$

ami éppen az eltérés kisebbedését jelenti. Az $\overline{AC} + \overline{DB} = \overline{CD}$ és $\overline{AC} = \overline{DB}$ feltételek viszont a tételben kimondott feltétellel ekvivalensek.

4. Nézzük ezután a terület szempontjából legjobban approximáló polygonokat.

A K -ba írt legnagyobb területű n -szög bármelyik két szomszédos oldala közül egyik a másikának a szögpontjukban K -hoz húzott érintőre vonatkozó tükörképe.



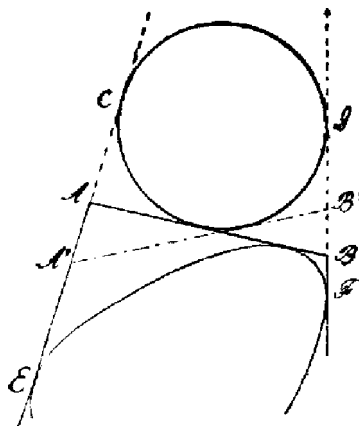
5. ábra

Legyen u. i. A, B, C rendre valamely n -szög három egymásután következő csúcspontja. (5. ábra.) Vegyük tekintetbe azt az ellipszist, melynek fókuszai A és C , és amely K -t az $\widehat{AC}$ íven érinti. Legyen az érintési pont B' . AB' és $B'C$ egymással (az ellipszisre vonatkozó ismert tétel alapján) a fent megjelölt viszonyban vannak. Feltéve, hogy B nincs valamely érintési pontban (amikor is B az ellipszis belső pontja):

$$AB + BC < AB' + B'C,$$

amivel állításunkat igazoltuk.

5. Foglalkozzunk végül a K köré írható legkisebb területű n -szöggel. Rajzoljuk meg az n -szög bármely oldalához azt az érintőkört, mely K -n kívül fekszik és amely egyúttal a két szomszédos oldal meghosszabbítását is érinti. Az extrém polygonnál ez a kör K -t érinti.



6. ábra

Világos mindenekelőtt, hogy az extrém polygon minden oldala érinti K -t. Ha azonban feltételünk valamely P polygonra nincs kielégítve, akkor könnyen szerkeszthető P -vel egyenlő területű polygon, melynek viszont nem minden oldala érinti K -t, jelöljük a tételben szereplő körnek az AB oldallal szomszédos oldalak meghosszabbításával való érintési pontjait C ill. D -vel (6. ábra). Ezen oldalak K -val való E és F érintési pontjait változtatlanul hagyva, helyettesítjük AB -t a körnek oly $A'B'$ érintőjével, mely K -t nem érinti. Nyilvánvaló, hogy ezáltal a polygon területe nem változott, mert

$$\overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{EA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'F};$$

u. i. az egyenlőség mindkét oldala $= \overline{EC} + \overline{DF}$.

Ismételjük, hogy az itt tárgyalt feltételek nem elegendők az extrém polygonok meghatározására. Érdekes probléma azonban annak eldöntése, hogy e feltételek milyen speciális esetben definiálják egyértelműen az extrém sokszöget és hogy ebben az esetben az „eltérést” a bizonyításban leírt módon állandóan csökkentve, az így előálló polygonsorozat konvergál-e? Ezáltal lehetséges volna u. i. az extrém polygonot tetszés szerinti pontossággal megszerkeszteni.

Budapest, 1936.

Fejes László
IV. é. bölcsészhallgató