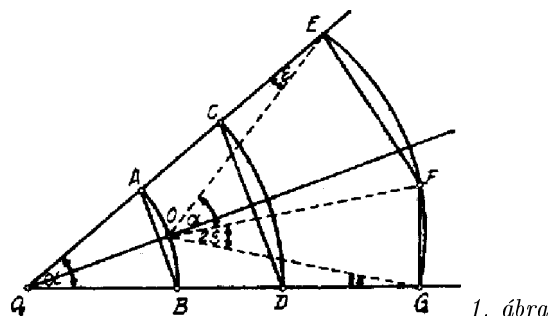


A Winkler-féle szögharmadolási módszerről.¹

I. Szögtávolságok összefüggése.

1°. Szögtávolságnak fogjuk nevezni egy szög szárai közé húzott körív húrját. Minden szögtávolság merőleges a szög felezőjére.



1. ábra

Rajzoljunk a tetszőleges α szög O_1 csúcsából a szárak közé a sugárral $\widehat{AB}$ ívet (l. 1. ábra), majd a $b \geq \frac{\overline{AB}}{2}$ sugárral $\widehat{CD}$ ívet. Ezek után az $\widehat{AB}$ ív 0 felezőpontjából ugyancsak b sugárral meghúzzuk az α szög szárai közé az $\widehat{EG}$ ívet. Erre az ívre az előbbi $\widehat{AB}$ és $\widehat{CD}$ szögtávolságok egymásután pontosan rámerhetők: $\overline{EF} = \overline{CD}$ és $\overline{FG} = \overline{AB}$.

Ugyanis, ha $\overline{O_1A} = a$ és $\overline{O_1C} = \overline{O_1E} = b$, akkor

$$(1) \quad \overline{AB} = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{és} \quad \overline{CD} = 2b \sin \frac{\alpha}{2} \dots$$

Legyen $\angle O_1EO = \angle O_1GO = \varepsilon$, akkor az O_1EOG deltoid O -nál levő szöge: $360^\circ - (\alpha + 2\varepsilon)$ és így $\angle EOG = \alpha + 2\varepsilon$. Jelöljük F -fel az $\widehat{EG}$ ív azon pontját, melyre

$$(1a) \quad EF = CD = 2b \sin \frac{\alpha}{2} \dots$$

ekkor $\triangle EOF \cong \triangle CO_1D$ és így $\angle EOF = \alpha$, miért is $\angle FOG = 2\varepsilon$ és így:

$$(1b) \quad FG = 2b \sin \varepsilon \dots$$

Ámde az OEO_1 $\triangle$ -ből a sinustételel:

$$a : b = \sin \varepsilon : \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \text{innen} \quad \sin \varepsilon = \frac{a}{b} \sin \frac{\alpha}{2}$$

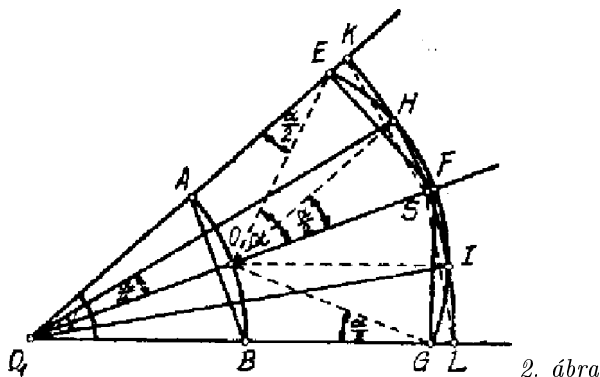
és 1b)-ből:

$$(1c) \quad FG = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \overline{AB} \dots$$

Q. e. d

2°. Ha $b = a$ (l. 2. ábra), akkor a $\widehat{CD}$ ív egybeesik $\widehat{AB}$ -vel és így az $\widehat{EG}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság most pontosan kétszer mérhető föl: $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{AB}$.

Osszuk az $\widehat{EG}$ ívet a H, F, I pontokkal négy egyenlő részre. Az $\overline{O_1H} = \overline{O_1I}$ sugárral húzott $\widehat{KL}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság szintén kétszer mérhető föl: $\overline{KS} = \overline{SL} = \overline{AB}$.



2. ábra

¹ Dr. Winkler Béla (1900–1935.) korán elhunyt kiváló büntetőjogász, jogbölcész és filozófus szakíró, aki matematikával és természettudományokkal is behatóan foglalkozott.

Ugyanis most

$$(2) \quad \overline{AB} = \overline{EF} = \overline{FG} = 2a \sin \frac{\alpha}{2}, \dots$$

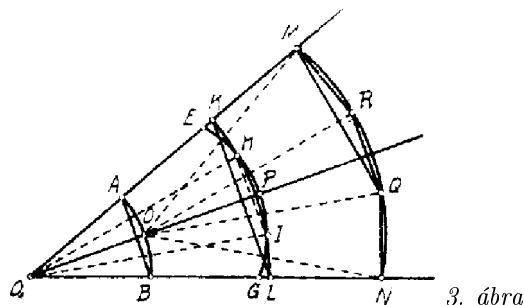
és a HO_1 egyenlőszárú háromszögből, mivel $\overline{O_1O} = \overline{OH} = a$ és $HO_1O \sphericalangle = O_1HO \sphericalangle = \frac{\alpha}{4}$, azért

$$(2a) \quad \overline{O_1H} = 2a \cos \frac{\alpha}{4} = \overline{O_1I} = \overline{O_1K} = \overline{O_1L} \dots$$

Most már

$$(2b) \quad \overline{KS} = \overline{SL} = 2\overline{O_1K} \cdot \sin \frac{\alpha}{4} = 4a \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \overline{AB}.$$

Q. e. d



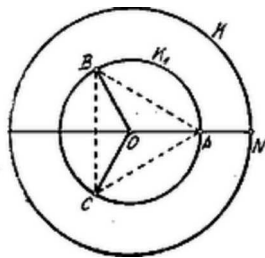
3°. Az $\widehat{AB}$ ív O felezőpontjából (l. 3. ábra) most az előbbi $\overline{O_1K} = \overline{O_1L}$ sugárral húzzunk az α szög szárai közé $\widehat{MN}$ ívet. Erre az 1°. pont szerint a $\overline{KL}$ és $\overline{AB}$ szögtávolságok egymásután pontosan felmérhetők. $\overline{MQ} = \overline{KL}$ és $\overline{QN} = \overline{AB}$. Viszont az $\widehat{MQ} = \widehat{KL}$ ívre az $\overline{AB}$ szögtávolság kétszer mérhető rá: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{AB}$ és így az $\widehat{MN}$ ívre végül is háromszor mérhető föl $\overline{AB}$. Az $MON \sphericalangle$ -et az OR , OQ sugarak ilyenformán 3 egyenlő részre osztják, de az eredeti $MO_1N \sphericalangle = \alpha$ szöget az O_1R , O_1Q sugarak nem.

II. Az egyenes szög (180°) harmadolása.

4°. Legyen adva egy k kör O középponttal (l. 4. ábra). Szerkesszük meg a vele koncentrikus k_1 kört úgy, hogy a k_1 körbe írható szabályos húrháromszög oldala az eredetileg megadott k kör sugarával legyen egyenlő:

$$(3) \quad \overline{AB} = \overline{ON} = r.$$

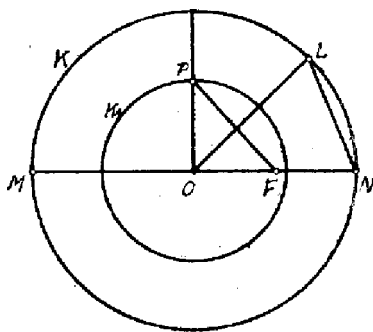
$$\overline{AB} = \overline{OA}\sqrt{3}, \quad \text{azért} \quad r = r_1\sqrt{3}, \quad \text{ill.} \quad r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}} \dots$$



4. ábra

A k_1 kör pontosan is megszerkeszthető, mi azonban egy közelítő szerkesztést fogunk alkalmazni, mely azután bármely szög harmadolásánál is felhasználhatónak fog bizonyulni.

Vegyük körzöbe a k körbe írt szabályos nyolcszög $\widehat{NL}$ oldalát (l. 5. ábra) és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából a körzönyílással messük el a rá merőleges sugarat. Az így kapott P pont a keresett k_1 kör kerületén van. E módszer azonban nem pontos, hanem a k_1 -nél kissé nagyobb sugarú kört ad.



5. ábra

T. i.:

$$(4) \quad \overline{NL} = a_8 = 2r \sin 22^\circ 30' = 2r \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = 2r \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = r \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \overline{PF} \dots$$

és így

$$(4a) \quad \overline{OP} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2 (2 - \sqrt{2}) - \frac{r^2}{4}} = r \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{2}} \dots$$

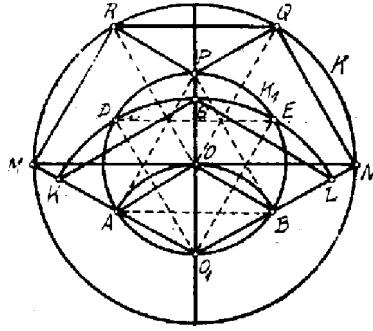
Az $\overline{OP} \approx r_1$ állítás tehát egyértelmű azzal az állítással, hogy

$$(4b) \quad \frac{7}{4} - \sqrt{2} \approx \frac{1}{3}, \quad \text{azaz} \quad \sqrt{2} \approx \frac{7}{4} - \frac{1}{3} = \frac{17}{12} = 1,416 \dots$$

ami a $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$ értékhez képest 0,0024-nyi hibát jelent (0,17%-os hiba). Végül is

$$(4c) \quad \overline{OP} = r_1 \cdot 1,00346 \dots$$

vagyis szerkesztésünk valóban a k_1 -nél kissé nagyobb sugarú kört ad.



6. ábra

5°. Húzzuk meg most már (l. 6. ábra) a k kör $\overline{MN}$ átmérőjét, valamint a k_1 körnek erre merőleges $\overline{O_1P}$ átmérőjét és a k_1 körbe írt szabályos ABP , O_1DE háromszögek többi oldalait. Mivel $\overline{MO} = \overline{AB} = \overline{ON}$ és $MO \parallel AB \parallel ON$, azért az $ABOM$, $ABNO$ négyszögek parallelogrammák. Továbbá, mint a k_1 körbe írt szabályos hatszög oldalai: $\overline{AO_1} = \overline{O_1B} = \overline{BO} = \overline{OA}$ és így az AO_1BO négyszög rombusz, melyben $\angle AO_1B = \angle AOB = 120^\circ$. A 180° -os $\angle MON$ és a 120° -os $\angle MO_1N$ ugyanolyan viszonyban vannak, mint a 3. ábrabeli $\angle MON$ és $\angle MO_1N$. Utóbbi szög szárai közé itt is húzzuk meg O_1 középpontból az O ponton átmenő $\widehat{AB}$ ívet és a D, E pontokon átmenő $\widehat{KL}$ ívet. Ha a K kör sugara: r , akkor az I. rész fejtegetései szerint az egyes ívekre a köv. szögtávolságok mérhetők föl:

$$\begin{aligned} \text{az } \widehat{AB} \text{ ívre: } \overline{AB} &= r, \\ \text{a } k_1 \text{ kör } \widehat{APB} \text{ ívére: } \overline{AP} + \overline{PB} &= 2r, \\ \text{a } \widehat{KL} \text{ ívre: } \overline{KG} + \overline{GL} &= 2r, \\ \text{és a } k \text{ kör } \widehat{MN} \text{ ívére: } \overline{MR} + \overline{RQ} + \overline{QN} &= 3r. \end{aligned}$$

Az MN ívet harmadoló R, Q pontok O -val együtt szabályos háromszöget alkotnak, mely az O_1DE Δ -ból keletkezik, ha ezt az $\overline{O_1O}$ translationnak vetjük alá. Ennélfogva az ORQ Δ középpontja a P pont és így $\overline{OP} = \overline{PR} = \overline{PQ}$. (Megjegyzendő, hogy ez a 3. ábrabeli ORQ Δ -re is vonatkozik, mely az O_1HI Δ translációjából keletkezik és így ott is $\overline{OP} = \overline{PR} = \overline{PQ}$).

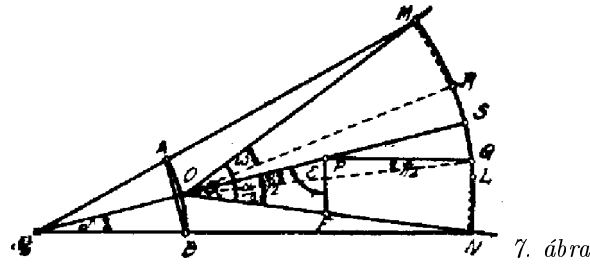
Ezek figyelembevételével a 180° -os $\angle MON$ harmadolására, vagyis az R, Q pontok megszerkesztésére két eljárást is nyertünk: az $\angle MON$ szárai közé meghúzzuk a k kör $\widehat{MN}$ ívét, majd az $\angle MON$ felezőjén a 4° . pontban ismertetett módszerrel megkeressük a k_1 kört megadó P pontot.

Ezek után az egyik eljárás abban áll, hogy az O ponton túl meghosszabbított szögfelezőre rámérjük az $\overline{O_1O} = \overline{OP}$ távolságot és az $\angle MO_1N$ szárai közé $\overline{O_1O}$ sugárral az $\widehat{AB}$ ívet rajzoljuk. Ekkor az $\widehat{AB}$ szögtávolság éppen háromszor mérhető rá az $\widehat{MN}$ ívre: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{QN} = \overline{AB}$.

A másik eljárás a következő: P pontba beszúrva a körzót, $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet: így éppen az R, Q pontokat kapjuk.

III. A szögharmadolás három módszere.

6°. A 180° -os szög harmadolásának iménti végrehajtása kiterjeszthető minden más szögre is. Így a szögharmadolás három módszerét kapjuk.



Az első módszer szerint (l. 7. ábra) az α szög szárai közé húzott $\widehat{MN}$ ívet négy egyenlő részre osztjuk, azután az $\overline{NL}$, negyedívtávolságot körzőbe vesszük és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából e körzőnyílással elmetsszük a szögfelezőt P pontban (a két metszéspon közül az $\widehat{MN}$ ívhez közelebb fekvőt vesszük). Meghosszabbítva O ponton túl a szögfelezőt és rámérve az $\overline{O_1O} = \overline{OP}$ távolságot, az MO_1N szarai közé most is meghúzzuk $\overline{O_1O}$ sugárral az $\widehat{AB}$ ívet. Az $\overline{AB}$ szögtávolság az $\widehat{MN}$ ívre háromszor mérhető föl: $\overline{MR} = \overline{RQ} = \overline{QN} = \overline{AB}$. Az MOR szög tehát közelítőleg $\frac{\alpha}{3}$ -mal egyenlő. (Ez a szerkesztés mintegy megfordítottja a 3. ábrán látható szerkesztésnek és annak pontossága itt csak azért tűnik el, mert az $\overline{O_1O}$ távolság itt adott megszerkesztése nem pontos, mint ahogy ez a távolság körzővel és vonalzóval pontosan nem is szerkeszthető meg.)

Egyszerűség kedvéért legyen $\overline{OM} = \overline{ON} = 1$, tehát $\overline{OF} = \frac{1}{2}$. A negyedívtávolság:

$$(5) \quad \overline{NL} = 2 \sin \frac{\alpha}{8} = \overline{FP} \dots$$

Legyen OPF szög $= \varepsilon$, ekkor az OPF Δ -ben a sinustétellel:

$$(5a) \quad \sin \varepsilon : \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{8}; \quad \text{innen} \quad \sin \varepsilon = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{8}} \dots$$

Mivel pedig

$$(5b) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = 4 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{4} \dots$$

azért 5a)-ból:

$$(5c) \quad \sin \varepsilon = \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots$$

Ezekután

$$(5d) \quad \overline{OP} : \overline{FP} = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \right) : \sin \frac{\alpha}{2} \dots$$

(A P pont másik lehetséges helyzetében ε helyett $180^\circ - \varepsilon$ volna írandó). Most már az 5d)-ből, figyelembevételével FP -nek 5) alatti értékét és az 5a) összefüggést:

$$\overline{OP} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{8} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon \right)}{2 \sin \varepsilon} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \varepsilon + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \varepsilon}{2 \sin \varepsilon},$$

ill. 5b) és 5c) alapján:

$$(5e) \quad \overline{OP} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \varepsilon + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8}}{2 \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8}} = 2 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \varepsilon + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \dots$$

Tisztán az α -val kifejezve pedig:

$$(6) \quad \overline{OP} = 2 \sin \frac{\alpha}{8} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \overline{O_1O} = \overline{O_1A} = \overline{O_1B} \dots$$

Az OO_1N Δ -ból a cosinustétellel:

$$\begin{aligned}
 \overline{O_1N}^2 &= \overline{O_1O}^2 + 1 - 2\overline{O_1O} \cdot \cos\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\alpha}{8}\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}\right) + \\
 &+ 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \\
 &+ 1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = \\
 &= 4\sin^2\frac{\alpha}{8} - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + 6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \\
 &+ \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{4}\cos\alpha + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \\
 (6a) \quad &+ 4\sin^2\frac{\alpha}{8} + 6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} \dots
 \end{aligned}$$

Most már az $MO_1O \sphericalangle = OO_1N \sphericalangle = \delta$ szög kiszámítható a sinustétellel:

$$(6b) \quad \sin\delta : \sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 : O_1N, \quad \text{tehát} \quad \sin\delta = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\overline{O_1N}} \dots$$

Az $\overline{AB}$ szögtávolság:

$$(6c) \quad \overline{AB} = 2\overline{O_1A} \cdot \sin\delta = 2\frac{\overline{O_1O}}{\overline{O_1N}} \sin\frac{\alpha}{2} = \overline{MR} \dots$$

A keresett $MOR \sphericalangle = \omega$ szögre tehát felírhatjuk, hogy

$$(6d) \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{\overline{MR}}{2\overline{OM}} = \frac{\overline{MR}}{2} = \frac{\overline{O_1O} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\overline{O_1N}} \dots,$$

ill. 6) és 6a) alapján:

$$(7) \quad \sin\frac{\omega}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{4}\sin\alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos\alpha + \cos^2\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{8} + 6\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}}}}.$$

E képlet az $\omega \approx \frac{\alpha}{3}$ szöget, mint α függvényét szolgáltatja. Értéktáblázatából (l. alább) kiderül, hogy e szerkesztéssel csak az első 3 negyed-beli szögek közelítő harmadolása végezhető el, a 4-ik negyedben már igen nagy az eltérés.

Minthogy $\alpha = 210^\circ$ -nál $\omega > \frac{\alpha}{3}$, de már $\alpha = 240^\circ$ -nál $\omega < \frac{\alpha}{3}$, azért kell lennie egy olyan $210^\circ < x < 240^\circ$ értéknek, melyre $\omega = \frac{x}{3}$. Az x szög közelítő értéke *lineáris interpolációval* meg is állapítható. Az $\omega = f(\alpha)$ függvény görbéjének e szakaszát ugyanis egyenesnek véve, felírható a köv. aránylat:

$$(7a) \quad (x - 210^\circ) : (240^\circ - x) = (70^\circ 8' 14'' - 70^\circ) : (80^\circ - 79^\circ 49' 52''), \quad \text{melyből } x = 223^\circ 26' 54''$$

Ez tehát közelítőleg az α szög, melynek harmadrészét szerkesztésünk pontosan adja meg.

Ha már most egy 4-ik negyedben levő α szöget akarunk harmadolni, akkor vagy a $360^\circ - \alpha$ hegyes szöget harmadoljuk és harmadrészét kivonjuk $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ -ból, vagy pedig $\frac{\alpha}{2}$ -t harmadoljuk és a kapott szöget kétszer vesszük.

7°. A 180° -os szög harmadolásánál talált másik eljárás is eredményre vezet: az előbb leírt módon megkeressük a szögfelezőn a P pontot, majd ide beszúrva a körzőt, $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet (l. 7. ábra). Az így kapott R, Q pontok az $\widehat{MN}$ ívet közelítőleg ismét három egyenlő részre osztják.

Most tehát az $OPQ \Delta$ egyenlőszárú; oldalainak hosszúsága 6) szerint:

$$(8) \quad \overline{OQ} = 1, \quad \overline{OP} = \overline{PQ} = 2\sin\frac{\alpha}{8}\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{8}} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \dots$$

A $POQ \sphericalangle = \frac{\varphi}{2}$ szögre felírhatjuk tehát:

$$(8a) \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{OQ}}{2\overline{OP}} = \frac{1}{2\overline{OP}} \dots,$$

ill.

$$(9) \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{8} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{8} + \cos \frac{\alpha}{2}}} \dots$$

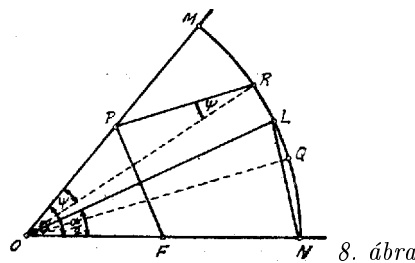
E képlet az $ROQ \sphericalangle = \varphi \approx \frac{\alpha}{3}$ szöget adja meg α függvényeként. Értéktáblázatából (l. alább) kiderül, hogy ez a szerkesztés is csak az első 3 negyed-beli szögekre alkalmazható közvetlenül. Közelítése e negyedekben rosszabb, mint az első szerkesztésé, a 4-ik negyedben azonban nem ad olyan nagy eltéréseket, mint az. Ismét 210° , és 240° között találjuk meg ezt a szöget, melynek szerkesztésünk pontosan szolgáltatja a harmadrészét. A számítás eredménye most $226^\circ 45' 7''$.

8°. Legyen az $\widehat{MN}$ ív felezőpontja: S (l. 7. ábra). Ha $\widehat{QN} = \frac{\widehat{MN}}{3}$, akkor:

$$(10) \quad \widehat{SO} = \frac{\widehat{MN}}{2} - \frac{\widehat{MN}}{3} = \frac{\widehat{MN}}{6} = \frac{\widehat{SN}}{3}, \dots$$

vagyis a Q pont megszerkesztésével az $\widehat{SN}$ ívet és az $SO \sphericalangle$ -et is harmadoltuk. E felfogásban tehát a szögharmadolás a következőképpen végzendő (l. 8. ábra):

Az α szög szárai közé húzott $\widehat{MN}$ ívet felezzük, azután az $\overline{NL}$ félívtávolságot körzöbe vesszük és az $\overline{ON}$ sugár F felezőpontjából e körzönyílással elmetsszük a szög másik szarát a P pontban. (Ismét az $\widehat{MN}$ ívhez közelebb eső metszéspontot választjuk). Most e P pontba szúrjuk a körzöt és az $\overline{OP}$ sugárral elmetsszük az $\widehat{MN}$ ívet: így az ívünket harmadoló R pontot kapjuk.



8. ábra

Az OPR egyenlőszárú háromszög oldalai most:

$$(11) \quad \overline{OR} = 1, \quad \overline{OP} = \overline{PR} = 2 \sin \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} \cos \alpha}, \dots$$

t. i. e szerkesztés úgy fogható fel, mintha az előbbi szerkesztést hajtottuk volna végre, de 2α nagyságú szögön, tehát 8)-ban α helyett 2α írandó. A $POR \sphericalangle = \psi$ szögre felírhatjuk tehát:

$$(11a) \quad \cos \psi = \frac{\overline{OR}}{2\overline{OP}} = \frac{1}{2\overline{OP}} \dots,$$

ill.

$$(12) \quad \cos \psi = \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \cos \alpha}} \dots$$

A $\psi \approx \frac{\alpha}{3}$ szögnek, mint α függvényének értéktáblázatából kiderül, hogy e harmadik módszer kb. 135° -ig használható, ezentúl egyre rosszabb közelítést ad. Most $113^\circ 22' 33''$, az előbbi szög fele az a szög, melynek harmadrészét e szerkesztés pontosan adja.

Értéktáblázataink a következők:

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\frac{\alpha}{3}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
α	0°	$10^\circ 5''$	$20^\circ 43''$	$30^\circ 2' 20''$	$40^\circ 5' 10''$	$50^\circ 8' 32''$	$60^\circ 10' 48''$
φ	0°	$10^\circ 14'$	$20^\circ 33'$	$30^\circ 46' 40''$	$40^\circ 54' 24''$	$50^\circ 53' 20''$	$60^\circ 43'$
ψ	0°	$10^\circ 16' 30''$	$20^\circ 27' 12''$	$30^\circ 21' 30''$	$39^\circ 51' 39''$	$48^\circ 46' **$	$56^\circ 50' 39''$

α	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\frac{\alpha}{3}$	70°	80°	90°	100°	110°	120°
ω	70°8'14"	79°49'52"	88°49'50"	95°43'40"	94°20'40"	0°*
φ	70°21'7"	79°43'18"	88°48'27"	97°32'	105°50'50"	113°41'18"
ψ	68°49'53"	69°29'24"	73°40'30"	76°26'28"	77°58'33"	78°27'47"

* A 4-ik negyedben ω rohamosan esik. Közbülső értékek: 345°-nál $\omega = 79°9'40''$; 357°-nál $\omega = 8°18'22''$.

** A ψ szög kb. $\alpha = 135°$ -ig használható; itt $\psi = 44°24'13''$.

Mint látható, tehát mindhárom szerkesztés csak közelítő és mindháromnak más a közelítési mértéke.

Ujpest, 1937. február hó 6-án.

Dr. Elek Tibor