2219. Hány olyan n jegyű szám van, melyek csupán az $1, 2, 3$ számjegyeket tartalmazzák de e három számjegy mindegyikét legalább egyszer?

Megoldás. Az 1, 2, 3 számjegyekből alakítható n-jegyű számokat az 1, 2, 3 elemekből ismétléssel képezett n-ed osztályú variáció csoportok adják, amelyeknek száma

$$V_a^{(i)}(n) = 3^n.$$

Ezek között csupán egyféle elemet tartalmazó csoport $(11\dots1, 22\dots2, 33\dots3)$ összesen 3 van. Olyan csoport, amely pl. csakis az 1, 2 elemeket tartalmazza, de e kettő mindegyikét legalább egyszer, összesen

$$2^n - 2$$

van, mert 2^n az 1, 2 elemekből ismétléssel alakított variációk száma, amelyben tehát a $11\dots1, 22\dots2$ csoportok is bennfoglaltatnak.

A feladatunkat kielégítő számok száma tehát

$$3^n - 3\cdot\big(2^n - 2\big) - 3 = 3\big(3^{n-1} - 2n + 1\big).$$

2220. Bebizonyítandó, hogy bármely pozitív egész számot jelent is n

$$5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$$

mindenkor osztható 8-cal.

Első megoldás. 1. Ha $n = 1$, akkor

$$5 + 2\cdot 3^0 + 1 = 8$$

osztható 8-cal.

2. $4\cdot 5 + 4\cdot 3^0 = 24$ osztható 8-cal, tehát

$$(5 + 2\cdot 3^0 + 1) + (4\cdot 5 + 4\cdot 3^0) = 5^2 + 2\cdot 3 + 1$$

is osztható 8-cal.

3. Ezt az okoskodást folytatva

$$\big(5^2 + 2\cdot 3 + 1\big) + \big(4\cdot 5^2 + 4\cdot 3\big) = 5^3 + 2\cdot 3^2 + 1$$

szintén osztható 8-cal.

4. Az indukció teljessége kedvéért tegyük föl, hogy $5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$ osztható 8-cal. akkor mivel a

$$4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1} = 4\big(5^n + 3^{n-1}\big)$$

kifejezés értékében a zárójelben két páratlan szám összege, vagyis páros szám áll. azért $4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}$ osztható $4\cdot 2 = 8$-cal és így

$$\big(5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1\big) + \big(4\cdot 5^n + 4\cdot 3^{n-1}\big) = 5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 1$$

szintén osztható 8-cal. Ha tehát a tétel igaz n-re, akkor igaz $(n+1)$-re is; ámde $n = 1$, 2-re igaz volt, tehát helyes marad $n = 3$-ra, ebből ismét $n = 4$-re is és általában n-nek minden pozitív egész számú értékére.

(Engel Sándor, Budapest.)

Második megoldás.

$$\begin{array}{ll}
5 \equiv \quad \pmod 8 & 3 = 3 \pmod 8 \\
5^2 \equiv 25 \equiv 1 \pmod 8 & 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8 \\
5^3 \equiv 5 \pmod 8 & 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8 \\
5^4 \equiv 25 \equiv 1 \pmod 8 & 3^3 \equiv 3 \pmod 8 \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
5^{2m} \equiv 1 \pmod 8 & 3^{2m} \equiv 1 \pmod 8 \\
5^{2m+1} \equiv 5 \pmod 8 & 3^{2m+1} \equiv 3 \pmod 8
\end{array}$$

1°. Ha tehát $n = 2m$, akkor

$$5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1 \equiv 1 + 2\cdot 31 \equiv 8 \equiv 0 \pmod 8.$$

2°. Ha pedig $n=2m+1$, akkor

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1\equiv 5+2\cdot 1+1\equiv 8\equiv 0(\pmod 8).$$

(Földy Zoltán, Budapest.)

Harmadik megoldás.

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=(4+1)^n+2(4-1)^{n-1}+1.$$

A $(4+1)^n$ hatványozást elvégezve a binominális-tétel segítségével, az első $(n-1)$ tag mindegyike osztható $4^2=16$-tal, tehát

$$(4+1)^n=16\cdot A+n\cdot 4+1$$

és hasonlóképp

$$(4-1)^{n-1}=4\cdot B+(-1)^{n-1},$$

tehát

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=16A+4n+1+8B+2\cdot(-1)^{n-1}+1=$$
$$=8\cdot C+4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2.$$

a) Ha n páratlan, akkor $(n\pm 1)$ páros, tehát

$$4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2=4n+2+2=4(n+1)$$

szintén osztható 8-cal,

b) ha pedig n páros, akkor $(n-1)$ páratlan, tehát

$$4n+2\cdot(-1)^{n-1}+2=4n$$

ismét osztható 8-ca1.

(Klein Pál, Budapest.)

Negyedik megoldás.

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=(4+1)^n+2(2+1)^{n-1}+1.$$

Ámde

$$(4+1)^2=16\cdot A+4n+1,$$
$$(2+1)^{n-1}=4\cdot B+2(n-1)+1,$$

tehát

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=16A+8B+4n+4(n-1)+1+2+1=$$
$$=16A+8B+8n=8\cdot C.$$

(Oszvald Ferenc, Budapest.)

Ötödik megoldás.

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=5\cdot(8-3)^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1.$$

Ámde

$$(8-3)^{n-1}=8\cdot A+(-1)^{n-1}\cdot 3^{n-1},$$

tehát

$$N=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1=8\cdot A'+(-1)^{n-1}\cdot 5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1.$$

a) Ha n páratlan, tehát $n-1$ páros, akkor

$$N=8A'+5\cdot 3^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+1=8\cdot A'+7\cdot 3^{n-1}+1=$$
$$=8A'+(8-1)\cdot 3^{n-1}+1=8A'+8\cdot 3^{n-1}-\left(3^{n-1}-1\right).$$

Feltételünk szerint $n-1=2m$, tehát

$$3^{n-1}-1=9^m-1=(8+1)^m-1=8B+1-1=8B$$

és így

$$N = 8A' + 8 \cdot 3^{n-1} + 8B.$$

b) Ha n páros, tehát $n-1$ páratlan, akkor

$$N = 8A' - 5 \cdot 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 8A' - 3^n + 1 = 8A' - \left(3^n - 1\right).$$

Feltételünk szerint $n = 2m$, tehát

$$3^n - 1 = 9^m - 1 = (8+1)^m - 1 = 8B + 1 - 1$$

és így

$$N = 8A' - 8B.$$

(Okolicsányi Ferenc, Budapest.)

Hatodik megoldás. Legyen

$$S_k = 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1.$$

akkor $S_1 = 8,\ S_2 = 4 \cdot 8, \ldots$ oszthatók 8-cal. Tegyük fel, hogy S_k is osztható 8-cal és vizsgáljuk meg, hogy S_{k+1} is osztható-e 8-cal?

$$\begin{gathered} S_{k+1} = 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1 = (4+1)5^k + 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} + 1 = \\ = 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1 + 4\left(5^k + 3^{k-1}\right). \end{gathered}$$

Ámde a zárójelben álló két páratlan szám összege páros, tehát $4\left(5^k + 3^{k-1}\right)$ osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal és így S_{k+1} is osztható 8-cal, stb.

(Radó Tibor, Budapest.)

Hetedik megoldás. Segédtétel:

$$x^n = (x-1)\left[(x-1) \cdot E + n\right] + 1,$$

ahol x, n és E egész számokat jelentenek.

Bizonyítás.

$$\begin{gathered} x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1\right) = \\ = (x-1)\Big[\left(x^{n-1} - 1\right) + \left(x^{n-2} - 1\right) + \ldots + \left(x^2 - 1\right) + (x-1) + n\Big]. \end{gathered}$$

Ámde $x^{n-1} - 1,\ \ x^{n-2} - 1,\ \ldots,\ x^2 - 1,\ x - 1$ mindegyike osztható $(x-1)$-gyel, tehát

$$x^n - 1 = (x-1)\left[(x-1) \cdot E + n\right],$$

vagyis

$$x^n = (x-1)\Big[(x-1)E + n\Big] + 1.$$

Segédtételünk szerint

$$\begin{gathered} 5^n = 4 \cdot (4 \cdot E_1 + n) + 1 = 16 \cdot E_1 + 4n + 1, \\ 2 \cdot 3^{n-1} = 2\left\{2 \cdot (2 \cdot E_2 + n - 1) + 1\right\} = 8E_2 + 4n - 2, \end{gathered}$$

tehát

$$5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 16E_1 + 8E_2 + 8n.$$

(Stojkovits Iván, Budapest.)

2221. Bebizonyítandó, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szemben fekvő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.

Megoldás. Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D-vel és legyenek az oldalak rendre $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Jelöljük továbbá az AC is BD átlók metszéspontját O-val és az $AOB\sphericalangle$-t φ -vel.

1°. Ha $AC \perp BD$, akkor

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2, \qquad & \overline{CD}^2 &= \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2, \\ \overline{BC}^2 &= \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2, \qquad & \overline{DA}^2 &= \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2, \end{aligned}$$

tehát csakugyan

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2.$$

2°. Ha viszont $a^2+c^2=b^2+d^2$, akkor az $AOB, BOC, \dots$ háromszögekből a cosinus-tétel szerint

$$\begin{aligned}
a^2 &= \overline{AO}^2+\overline{BO}^2-2\cdot\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot\cos\varphi,\\
b^2 &= \overline{CO}^2+\overline{DO}^2-2\cdot\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot\cos\varphi,\\
c^2 &= \overline{BO}^2+\overline{CO}^2+2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot\cos\varphi,\\
d^2 &= \overline{DO}^2+\overline{AO}^2+2\cdot\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cdot\cos\varphi,
\end{aligned}$$

tehát feltételünk szerint

$$-2\big(\overline{AO}\cdot\overline{BO}+\overline{CO}\cdot\overline{DO}\big)\cos\varphi=2\big(\overline{BO}\cdot\overline{CO}+\overline{DO}\cdot\overline{AO}\big)\cdot\cos\varphi,$$

vagy még

$$\big(\overline{AO}\cdot\overline{BO}+\overline{CO}\cdot\overline{DO}+\overline{BO}\cdot\overline{CO}+\overline{DO}\cdot\overline{AO}\big)\cdot\cos\varphi=0$$

Ámde a zárójelben csupán pozitív számok összege áll, tehát

$$\overline{AO}\cdot\overline{BO}+\overline{CO}\cdot\overline{DO}+\overline{BO}\cdot\overline{CO}+\overline{DO}\cdot\overline{AO}\neq 0$$

és így az egyedül lehetséges eset. Hogy

$$\cos\varphi=0,\quad \text{vagyis}\quad \varphi=\frac{\pi}{2}\quad \text{és így}\quad \mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}.$$

(Popper Aladár, Budapest.)