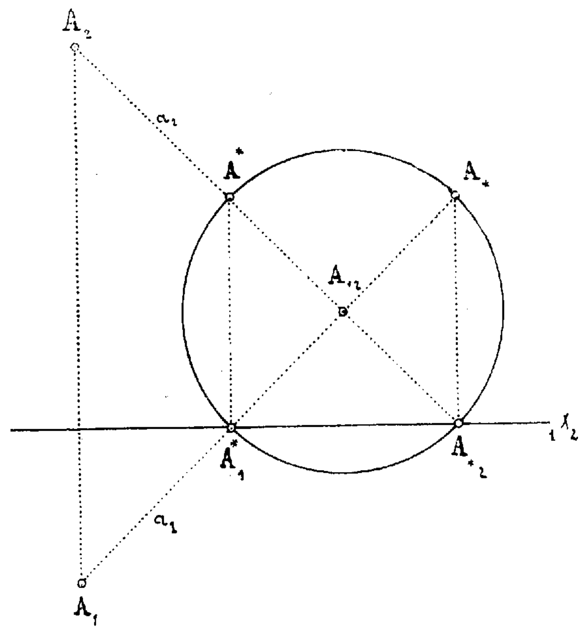
ÚJ ELJÁRÁS A TÉRELEMEK ÉS TÉRALAKZATOK VETETT ÁRNYÉKÁNAK MEGHATÁROZÁSÁHOZ ORTHOGONÁLIS PROJEKTIÓBAN 45° VILÁGÍTÁS MELLETT.

Az új eljárás eredetisége abban van, hogy a térelemeken és téralakzatokon keresztül menő fénysugaraknak és fénymenti síkoknak első sorban megkeressük a koincidenciaelemeit [1] és ezen elemek nyújtotta előnyöket használjuk föl a térelemek és téralakzatok vetett árnyékának meghatározásához.

Az 1-ső ábrán egy az 1-ső térnegyedben fekvő $(A_1,\ A_2)$ pont vetett árnyéka van előállítva, A^*-ban a 2-dik képsíkra, amely tényleg előáll, s A_*-ben az 1-ső képsíkra, amely nem áll elő. Mindkét árnyék a rendes eljárással, a 45°-ú háromszög felhasználásával állíttatott elő.



1. ábra

Meghatározván azonban az $(A_1,\ A_2)$ ponton keresztül menő $(a_1,\ a_2)$ fénysugár koincidencia pontját A_{12}-től, azt találjuk, hogy 45°-ú világítás mellett ezen A_{12} pont a fénysugár 1-ső nyomától A_{12}-tól és ennek 2-dik képétől A_{*2}-tól, továbbá a fénysugár 2-dik nyomától A_*-től és ennek 1-ső képétől A_1^*-től egyenlő távolságra van. $A_{12}A_{*2} = A_{12}A_* = A_{12}A_1^\circ = A_{12}A^*$-el.

Ezen egyenlőségből következik, hogy azon esetben, ha egy térbeli $(A_1,\ A_2)$ ponton átmenő fénysugárnak $(a_1,\ a_2)$-nek meghatároztuk a koincidencia pontját A_{12} pontot, s ismerni kívánjuk a fénysugár 1-ső, 2-dik nyomát, valamint ezen pontok mellérendelt képeit, akkor elegendő az A_{12} ponton átmenő fénysugár egyik képét, pl. az 1-ső képét meghosszabbítani a képtengelyig A_1°-ig, s körzőnyílásba venni $A_1^\circ A_{12}$ vonaldarabot és azzal kört rajzolni az A_{12} középpont körül, ahol ezen kör metszi a fénysugár megfelelő képeit és a képtengelyt, ott vannak a keresett $A_*,\ A^*,\ A_{*2}$ és A_1^* pontok.

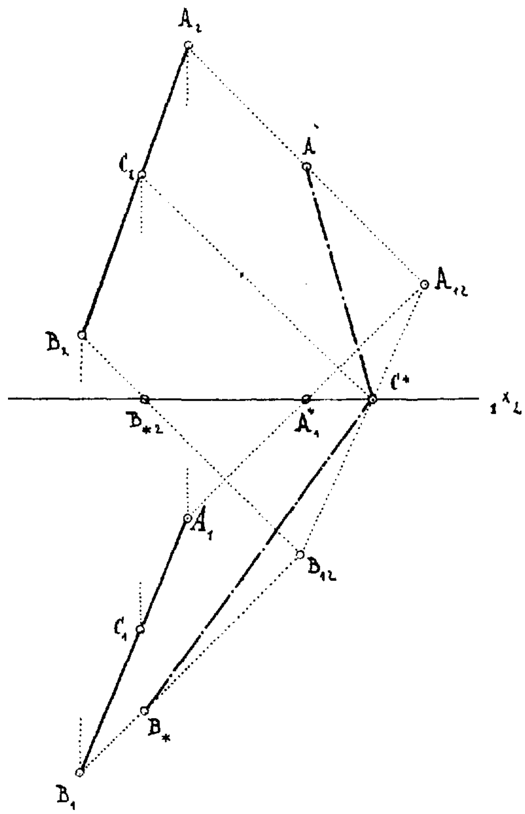
Az $(a_1,\ a_2)$ fénysugár koincidenciapontja A_{12} nem más, mint a térbeli $(A_1,\ A_2)$ pont vetett árnyéka a koincidenciasíkra, illetve ez árnyék egyesített két képe. Új eljárásunk tehát a térbeli pont vetett árnyékának meghatározásához ez:

Első sorban megkeressük a térbeli pont vetett árnyékát a koincidenciasíkra, azután az ezen keresztül menő fénysugár egyik képét metszésbe hozzuk a képtengellyel, az így nyert metsző pont és az előbbi pont közötti vonaldarabot körzőnyílásba vesszük és azt az előbbi árnyékponttól ellenkező irányban a fénysugár megfelelő képére áttesszük.

A térbeli pont vetett árnyéka a koincidenciasíkra eshetik a képtengely fölött, alatt vagy pedig éppen a képtengelyre. Az 1-ső esetben tájékozódunk a felől, hogy a térbeli pont árnyéka a 2-dik képsíkra, a 2-dik esetben pedig arról, hogy ezen vetett árnyék az 1-ső képsíkra esik, s végre a 3-dik esetben arról nyerünk tájékozást, hogy a térbeli pont szimmetriasíkban fekszik, amelynek árnyéka éppen a képtengelyre esik.

Alkalmazzuk az eddig kifejtett eljárást a 2-dik ábrán megadott AB vonaldarab vetett árnyékának meghatározásánál.

[1] Értvén koincidencia síkja alatt a második felező síkot.



2. ábra

Az $(A_1,\ A_2)$ pont vetett árnyéka a koincidenciasíkra A_{12} a képtengely fölött esvén, következik, hogy a 2-dik képsíkra esik; Ellenben $(B_1,\ B_2)$ pont vetett árnyéka a koincidenciasíkra B_{12} a képtengely alá esik. Egyenlővé tevén $A_{12}A_1^\circ = A_{12}A^*$-el és $B_{12}B_{*2} = B_{12}B_*$-el az így nyert A^*, B_* pontokban megkapjuk a térbeli AB vonaldarab két végpontjának vetett árnyékát a képsíkokra.

Összekötvén azonban A_{12} pontot B_{12}-vel az összekötő $A_{12}B_{12}$ vonaldarabban megkapjuk a térbeli AB vonaldarab vetett árnyékát a koincidenciasíkra, illetve a térbeli egyenes fénymenti síkjának koincidencia vonalát.

Ezen egyenes a képtengelyt $C*$ pontban metszi, mely pont nem más, mint a térbeli vonaldarab szimmetria síkban[2] fekvő C pontjának vetett árnyéka a képtengelyre, illetve a térbeli AB egyenes fénymenti síkjának tengelypontja.

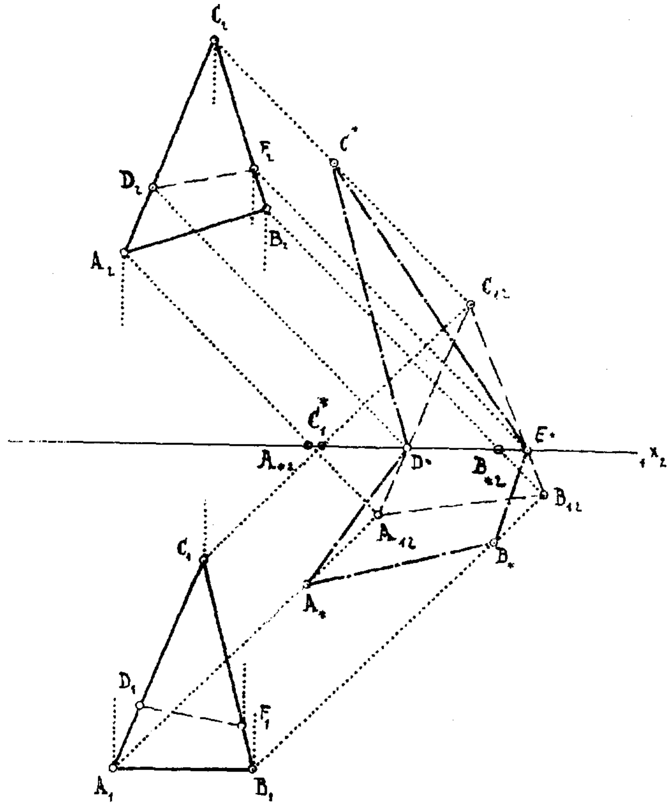
Ha tehát ezen $C*$ pontot az A^* és B_*-el összekötjük, $C * A^*$-ben megkapjuk a térbeli AB vonaldarab CA részének vetett árnyékát a 2-dik képsíkra; ellenben C^*B_* az adott vonaldarab CB részének vetett árnyékát az 1-ső képsíkra.

Új eljárásunk az adott vonaldarab vetett árnyékának meghatározásához ez: *Első sorban meghatározzuk a vonaldarab vetett árnyékát a koincidenciasíkra, azután megkeressük ennek a képtengellyel képezett metsző pontját és ezen metsző pontot a vonaldarab két végpontja vetett árnyékával összekötjük.*

A 3-dik ábrán adva van egy ABC háromszög 1-ső, 2-dik képe által; kerestetik vetett árnyéka a két képsíkra.

---

[2] Értvén szimmetriasík alatt az első felező síkot.



3. ábra

A háromszög A, B, C szögpontjainak vetett árnyéka a koincidencia-síkra A_{12}, B_{12}, C_{12}-ben van, mely pontokból a térbeli pontok vetett árnyékét a képsíkokra C^*, B_*, A_*-t az új eljárással határoztuk meg, $C_{12}C^* = C_{12}C_1^{\circ}$, $B_{12}B_* = B_{12}B_{*2}$, $A_{12}A_* = A_{12}A_{*2}$.

Összekötvén azonban az A_{12}, B_{12}, C_{12} pontokat egyenesekkel, a kapott $A_{12}B_{12}C_{12}$ háromszögben megkapjuk a térbeli ABC háromszög vetett árnyékát a koincidenciasíkra, illetve azon háromoldalú hasáb metsző idomát a koincidenciasíkkal, melynek vezérlő idoma az ABC háromszög; oldallapjai, az ABC háromszög oldalainak fénymenti síkjai és oldalélei, az ABC háromszög szögpontjain átmenő fénysugarak.

Ezen $A_{12}B_{12}C_{12}$ háromszög a képtengelynek D_*E_* darabját magában foglalja, mely vonaldarab nem más, mint térbeli háromszög szimmetriasíkban fekvő egyenesének, DE-nek vetett árnyéka a képtengelyre. A képtengely D_*E_* darabja az $A_{12}B_{12}C_{12}$ háromszöget két részre osztja, a képtengely fölötti $D^*C_{12}E^*$ és a képtengely alatti $D*A_{12}B_{12}E*$ részre; amiből következtetjük, hogy megfelelő térbeli DE [3] egyenes is, mely a szimmetriasíkban fekszik, a térbeli háromszöget vetett árnyék tekintetében szintén két részre fogja osztani; DCE részre, melynek vetett árnyéka a 2-dik képsíkra és $DABE$ részre, melynek vetett árnyéka az 1-ső képsíkra esik.

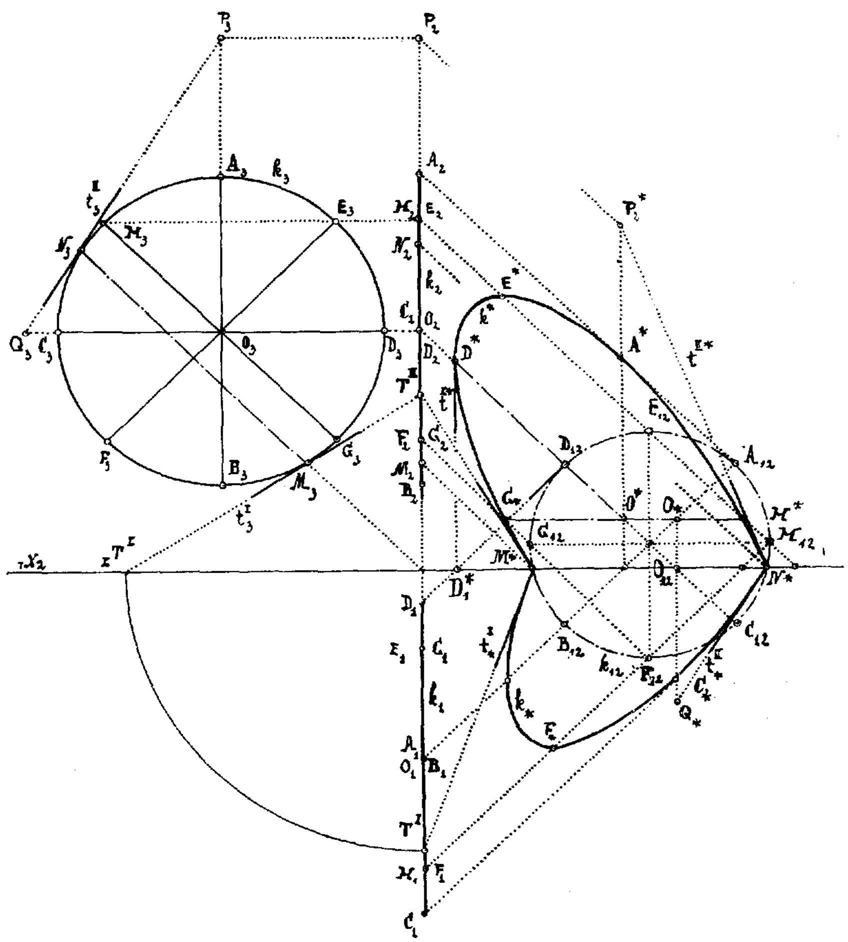
Új eljárásunk a vetett árnyék meghatározásához ez: *Első sorban meghatározzuk a síkidom vetett árnyékát a koincidenciasíkra, azután megállapítjuk a képtengely azon vonaldarabját, melyet ezen vetett árnyék befoglal, ezen vonaldarabnak megkeressük a megfelelő téregyenesét, mely az adott idomot vetett árnyék tekintetében két részre osztja, s végre ezen részeknek vetett árnyékát külön-külön meqkeressük megfelelő képsíkokra.*

Azonban azon síkidomoknál, melyeknek síkja a képtengelyhez általános helyzetű a síkidom vetett árnyéka a koincidenciasíkra hosszabb szerkesztést igényel, ezért ily esetben meg kell elégednünk a síkidom szimmetriasíkban fekvő egyenesének az előállításával, illetve a térbeli idomnak vetett árnyék tekintetében két részre való osztásával. Az idom vetett árnyékának meghatározása a koincidenciasíkra csak azon esetben kínálkozik célravezetőnek, ha a síkidom síkja a képtengelyre projiciálósík.

A 4-dik ábrán egy a képtengelyre projiciálósíkban fekvő k kör van adva három képe által; kerestetik vetett árnyéka az 1-ső, 2-dik képsíkra.

---

[3] A 3. ábrában F_1F_2 helyébe E_1E_2 gondolandó.



4. ábra

Az előbb fölállított tétel alapján elsősorban megkeressük a k kör vetett árnyékát a koincidenciasíkra, illetve ez árnyéknak egyesített 1-ső, 2-dik képét, a k_{12}-t, mely ismét kör, a melynek Q_{12} középpontja az adott k kör O középpontjának vetett árnyéka a koincidenciasíkra, s a melynek sugara $r \sin 45°$, illetve $r \cos 45°$-kal egyenlő, ahol r az adott k kör sugara.

Ezen k_{12} kör a képtengelyből $M_* N_*$ vonaldarabot befoglal, mely a térbeli k kör szimmetriahúrjának, MN-nek vetett árnyéka a képtengelyre.

Az MN húr a k kört két részre osztja, $MGDEAHN$-re és $MBFCN$-re. Az első rész vetett árnyéka a 2-dik képsíkra, ellenben az utóbbi körrésznek vetett árnyéka az 1-ső képsíkra esik. Határozzuk meg e körszeletek vetett árnyékát külön-külön a megfelelő képsíkokra.

A k_{12} kör $A_{12}B_{12}$, $C_{12}D_{12}$ átmérői az adott k kör azon átmérőinek vetett árnyékai a koincidenciasíkra, amelyek az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra merőlegesen állanak, ellenben $H_{12}G_{12}$, $E_{12}F_{12}$ átmérői az adott k, kör azon átmérőinek vetett árnyékai a koincidenciasíkra, melyek közül az 1-ső a szimmetriasíkkal, a második pedig a koincidenciasíkkal párhuzamosan halad.

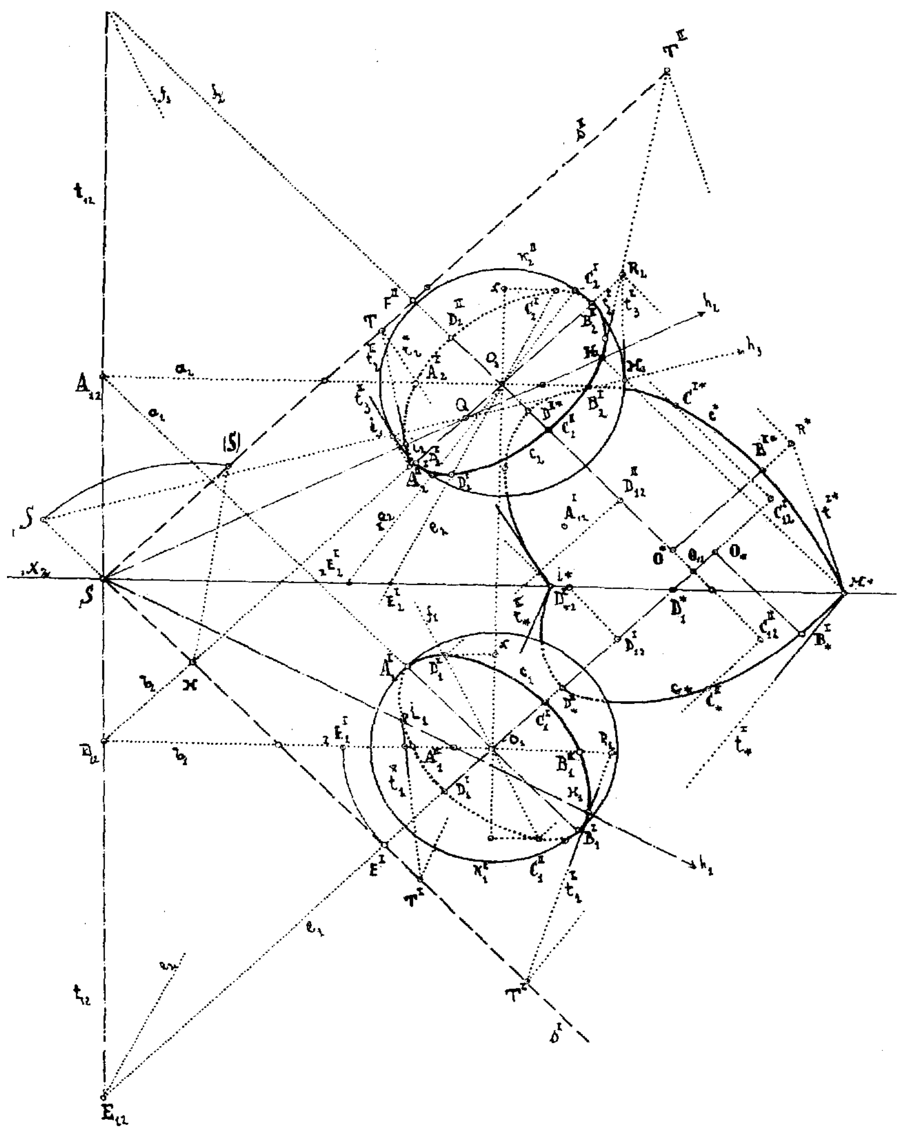
Az $MGDEAHN$ körszelet G, D, E, A, H pontjainak vetett árnyékát a 2-dik képsíkra G^*, D^*, E^*, A^*, H^*-t új eljárással a G_{12}, D_{12}, E_{12}, A_{12}, H_{12} pontok felhasználásával határozzak meg. Így pl. a D^* pontot az által, hogy $D_{12}D^*$-et egyenlővé teszünk $D_{12}D_1^*$ -el, illetve $D_{12}D_{*2}$-vel.

A körszeletek vetett árnyéka az 1-ső, 2-dik képsíkra és vetett árnyéka a koincidenciasíkra perspektív helyzetű affinidomok, mely affinitásnál a képtengely adja az affinitási tengelyt és a pontokon keresztül menő fénysugarak megfelelő képei adják a projiciáló sugarakat.

Ezen affin–kapcsolat felhasználható a k^*, k_* ellipszisek érintőinek meghatározásánál. Azonban a k^*, k_* ellipszisek közös pontjainak M_*, N^*-nek az érintőit az t^{I*}, t^{II*}-et és $t_\circ^I$, $t_\circ^{II}$-et célszerűbb a k_3 kör megfelelő érintőiből meghatározni az ábrán feltüntetett eljárással.

Az 5. ábrán adva van egy (O_1, O_2) középpontú gömb 1-ső, 2-dik képe által; kerestetik saját és vetett árnyéka.

A saját árnyék ismeretesen a gömb azon főköre c, melynek síkja a fénysugarakra merőleges. A c főkör 1-ső, 2-dik képe c_1, c_2 ellipszis.



5. ábra

A $c_1,\ c_2$ ellipszis meghatározása céljából előállítjuk a c főkör síkja koincidenciavonalat t_{12}-őt, 1-ső, 2-dik nyomát, $s^I,\ s^{II}$-őt, s végre szimmetriavonalát $(h_1,\ h_2)$-őt és pedig e főkör $A^I B^I$ 1-ső és $A^{II} B^{II}$ 2-dik fővonala által.

Az $(s^I,\ s^{II})$ sík a gömbtengelyét, illetve az 1-ső képsíkra projiciáló gömbátmérőt az $(O_1,\ O_2)$ pontban metszvén, ezért mindazon síkok metszővonalai az $(s^I,\ s^{II})$ síkkal, melyeket a gömbtengelyén keresztül fektetünk, ezen $(O_1,\ O_2)$ ponton mennek át.

A c_1 ellipszis főtengelye $A_1^I B_1^I$ ismeretesen a gömb 1-ső szegélykörének k_1^I-nek azon átmérője, mely a fénysugarak 1-ső képére merőleges; melléktengelye $C_1^I D_1^I$ irányra nézve a c főkör síkja $(O_1,\ O_2)$ pontján átmenő $(e_1,\ e_2)$ 1-ső esővonala. Ezen esővonal 1-ső nyoma E^I-ben, koincidenciapontja E_{12}-ben van, ezért 2-ik képe $E_{12} O_2 = E_2^I O_2 = e_2$.

Az $(e_1,\ e_2)$ esővonal végpontjai azon főkörön vannak, amelyet ezen esővonal 1-ső projiciáló síkja a gömbből kimetsz. Ezen pontok fölkeresése céljából forgassuk be a főkör síkját a benne fekvő $(e_1,\ e_2)$ esővonallal együtt a gömb tengelye, illetve az $(O_1,\ O_2)$ pont 1-ső képtávola körül a gömb 2-dik szegélykörére k^{II}-re, amikor is az esővonal 1-ső nyoma $({}_IE^I,\ {}_IE_2^I)$-be, maga az esővonal 2-dik képe ${}_IE_2^I O_2 = {}_I\, c_2$-be jut. Ezen beforgatott esővonal 2-dik képe a k^{II} kör 2-dik képét a keresett végpontokban $({}_IC_2^I,\ {}_ID_2^I)$-ben metszi, amelyeknek visszaforgatott 1-ső képe $C_1^I,\ D_1^I$ adja a c_1 ellipszis melléktengelye végpontjait, ellenben visszaforgatott 2-dik képe $C_2^I D_2^I$ adja a c_2 ellipszis legmélyebb és legmagasabb pontjait.

Minthogy 45°-ú világítás mellett a fénysugarak egyenlő szöggel hajlanak az 1-ső, 2-dik képsíkhoz, azért a c_2 ellipszis fő- és melléktengelye egyenlő a c_1 ellipszis ilynevű tengelyeivel. Ábránkon azonban a c_2 ellipszis melléktengelyét $C_2^{II} D_2^{II}$-őt azért állítottuk elő a c főkör síkja $(f_1,\ f_2)$ 2-dik esővonalának felhasználásával, hogy ezen $C_2^{II} D_2^{II}$ végpontokat ne csak 2-dik képben, hanem annak mellérendelt 1-ső képben $C_1^{II} D_1^{II}$-ben is bírjuk, mert az utóbbi pontok adják a c_1 ellipszis legmélyebb és legmagasabb pontját.

A c főkörnek a szimmetriasíkban fekvő pontjai $(H_1,\ H_2)$, $(i_1,\ i_2)$ ott vannak, ahol e főkört metszi a szimmetriasíkban fekvő $(h_1,\ h_2)$ egyenese. E pontok meghatározása céljából forgassuk a c főkört a benne fekvő $(h_1,\ h_2)$ egyenessel együtt síkjának $(A_1^{II} B_1^{II},\ A_2^{II} B_2^{II})$ 2-dik fővonala körül a 2-dik szegélykörre k^{II}-re; amikor is a c főkör k^{II}-re és a

$(h_1,\ h_2)$ egyenes ${}_ISQ = h_3$-ra esik. És azon $H_3,\ i_3$ pontok, amelyekben h_3 egyenes a k_2^{II} segélykört metszi, a keresett pontok 3-dik képe, amelyeknek 2-dik képök $H_2,\ i_1$-ben és 1-ső képök $H_1,\ i_1$-ben van.

A c főkör vetett árnyéka az 1-ső 2-dik képsíkra egyúttal a gömb vetett árnyéka e képsíkokra. E vetett árnyék meghatározásánál új eljárásunkat a következőkben érvényesíthetjük:

A c főkör szimmetriasíkban fekvő egyenese $(h_1,\ h_2)$ ezen főkört két részre osztja, $HB^IC^{II}D^Ii$ és $HB^{II}C^Ii$ részekre. Az 1-ső rész vetett árnyéka az 1-ső képsíkra, a 2-dik részé a 2-dik képsíkra esik, ellenben a főkör szimmetriasíkban fekvő húrjának Hi-nek vetett árnyéka éppen a képtengelyre esik.

A c főkör vetett árnyéka az 1-ső képsíkra egy oly ellipszis c_*, amelynek O_* középpontja az O középpontnak vetett árnyéka az 1-ső képsíkra, s amelynek $A_\circ^IB_\circ^I$ melléktengelye a C főkör azon A^IB^I átmérőjének vetett árnyéka az 1-ső képsíkra, mely a c főkör síkjának 1-ső fővonala, s amelynek $D_\circ^IC_\circ^I$ főtengelye a c főkör azon D^IC^I átmérőjének vetett árnyéka az 1-ső képsíkra, mely a c főkör 1-ső képsíkra nézve $(D_1^I,\ D^I)$ legmélyebb és $(C_1^I,\ C_2^I)$ legmagasabb pontját összeköti. Az utóbbi két pont közül csak a $(D_1^I,\ D_2^I)$ veti árnyékát tényleg az 1-ső képsíkra. Keressük meg azt az új eljárással.

A $(D_1^I,\ D^I)$ ponton keresztülmenő fénysugár 1-ső, 2-dik képe metszi egymást a D_{12} pontban, mely nem más, mint a térbeli $(D_1{}^I,\ D_2^I)$ pont vetett árnyéka a koincidenciasíkra. E ponton átmenő fénysugár 1-ső képe metszi a képtengelyt D_*^I-ben, mely pontnak távolát véve D_{12}-től, s $D_{12}D_1^\circ$-t a fénysugár 1-ső képére ellenkező irányban áttéve a D_{12}-től, az így nyert D_* pontban megkapjuk a $(D_1^I,\ D_2^I)$ pont vetett árnyékát az 1-ső képsíkra, illetve a c_* ellipszis főtengelyének egyik végpontját.

Hasonló eljárással vannak meghatározva a c_* ellipszis többi pontjai, kivéve tengely végpontjait, mely a térben párhuzamos lévén a c főkör síkjának 1-ső nyomával s^I-el, vetett árnyéka az 1-ső képsíkra $A_\circ^IB_\circ^I$ is párhuzamos az s^I-el, s nagyságra nézve megegyezik az A^IB^I-el, illetve ennek 1-ső képével $A_1^IB_1^I$-el.

A c_1 ellipszis egyes pontjaihoz az érintőket azon perspektív helyzetű affinkapcsolat által határozzuk meg, amely fennáll a c főkör 1-ső képe c_1 és e főkörnek vetett árnyéka az 1-ső képsíkra c_* között, s amely kapcsolatnál a c főkör síkjának 1-ső nyoma s^I adja az affinitási tengelyt, ellenben a fénysugarak 1-ső képsíkra vonatkoztatott képei adják a projiciáló sugarakat.

Keressük a c_* ellipszis azon $H_*,\ i*$ pontjaiban az érintőket, amely pontok a képtengelyen fekszenek.

Első sorban meghatározzuk a c_1 ellipszis megfelelő $H_1,\ i_1$ pontjaiban a $t_1^It_1^{II}$ érintőket, ami –tekintve–, hogy a c_1 ellipszis fő- és melléktengelyét ismerjük, a kapcsolt húrok előállításával nem jár nehézséggel. Ezen $t_1^It_1^{II}$ érintőket metszésbe hozzuk az affinitási tengellyel a $T^I,\ T^{II}$ pontokban, amelyeket összekötve a $H_*,\ i*$-el, az összekötő $t_\circ^It_\circ^{II}$ egyenesek a keresett érintők.

Hasonló eljárással határozzuk meg a c főkör $HB^{II}C^ID^{II}i$ részének vetett árnyékát a 2-dik képsíkra, amely vetett árnyék ismét egy oly ellipszis c^*, amelynek O^* középpontja a c főkör $(O_1,\ O_2)$ középpontjának vetett árnyéka a 2-dik képsíkra, s amelynek $A^{II*}B^{II*}$ melléktengelye e főkör azon átmérőjének vetett árnyéka a 2-dik képsíkra, amely a főkör síkjának 2-dik fővonala, s amelynek főtengelye a c főkör azon átmérőjének vetett árnyéka a 2-dik képsíkra, amely átmérő e főkör 2-dik képsíkra nézve $(D_1^{II},\ D_2^{II})$ legmélyebb és $(C_1^{II},\ C_2^{II})$ legmagasabb pontjait köti össze.

A c^* ellipszis pontjait és érintőit ugyanazon eljárással határozzuk meg, mint a c_* ellipszisét.

Debrecen.

Kovaliczky Antal.