

A geometria kézikönyvei a háromszög területének (T) képletei között felsorolják a következőt is:

$$T = \sqrt{rr_1r_2r_3}.$$

Azonban csak úgy szokták említeni, mint érdekes *numerikus* összefüggést a terület és a háromszög négy érintő körének sugarai között.

Talán nem felesleges az a megjegyzés, hogy ennek a képletnek *geometriai* értelmezés is adható, úgy hogy a levezetése is nagyjából geometriai úton végezhető.

Ebben a közleményben ugyanis bebizonyítom a következő *tételt*:

Minden háromszöghöz szerkeszthető olyan négyszög:

1. amelynek csúcsai a körülírt körre esnek és területe a háromszög területével egyenlő;
2. a négyszögnek a' , b' , c' , d' oldalaiából alakított

$$s' - a', s' - b', s' - c', s' - d'$$

különbségek ($2s' = a' + b' + c' + d'$) sorra nem egyebek, mint az érintő körök sugarai:

$$r, r_1, r_2, r_3.$$

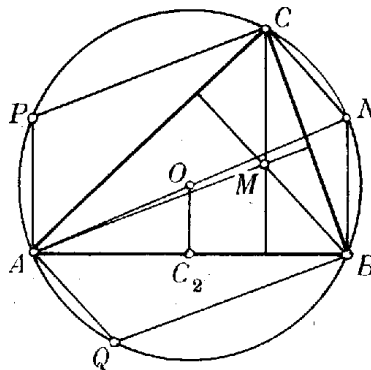
Ennek a tételnek közvetlen következménye, hogy a négyszög területét az oldalakkal kifejezve, az elül említett képletet kapjuk. Tehát joggal mondhatjuk, hogy ez a tétel a mondott képletnek geometriai tartalmát adja meg.

A bebizonyításhoz szükséges segédteteleket előre bocsátom.

1. A magassági pontnak a háromszög valamelyik csúcsától való távolsága kétszer akkora, mint a körülírt kör középpontjának távolsága a csúccsal szemben fekvő oldaltól.

Ha az AB oldal felező pontja C_2 , körülírt kör középpontja O és a magassági pont M , azt kell megmutatni, hogy

$$CM = 2 \cdot OC_2.$$



E végből vonjuk (1. rajz)

$$BN \parallel CM, CN \parallel BM.$$

A $CMBN$ paralelogrammában:

$$(1) \quad BN = CM.$$

Minthogy továbbá $\angle BNC = \angle CMB = 180^\circ - \angle A$, N pontja a körülírt körnek, de mivel még $NB \perp AB$, AN átmérő ($= 2R$), tehát az O ponton átmegy. Ezért

$$AOC_2\Delta \sim ANB\Delta,$$

s a hasonlóság arányszáma $1 : 2$; a honnan következik, hogy

$$NB = 2 \cdot OC_2,$$

vagy (1)-re való tekintettel

$$(2') \quad CM = 2 \cdot OC_2.$$

Jelöljük rövideg kedvéért, a magassági pont távolságát az A , B , C csúcsoktól m'_1 , m'_2 , m'_3 -vel, a körülírt kör középpontjának távolságát a szembenfekvő oldalaktól x_1 , x_2 , x_3 -mal, akkor még írhatjuk:

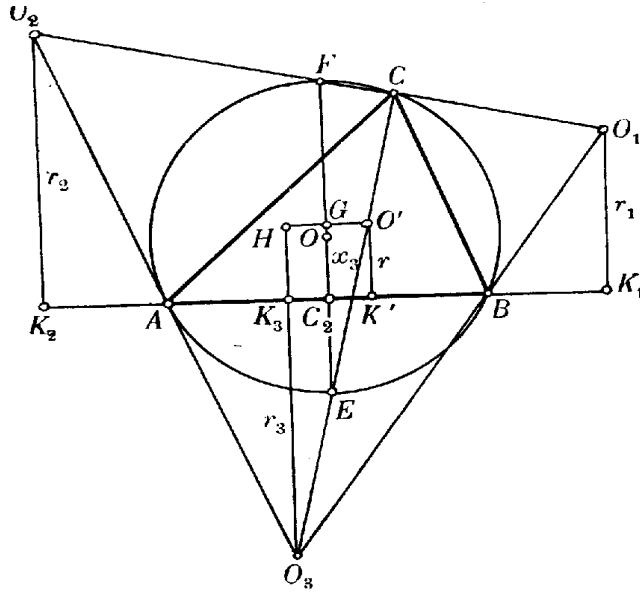
$$(2) \quad m'_1 = 2x_1, m'_2 = 2x_2, m'_3 = 2x_3.$$

Az előbbi bizonyítás hegyesszögű háromszögre vonatkozik, de tompaszögűre is változatlanul átvihető.

¹Rátz L. Math. Gyakorlókönyv 11. k. 67. l. 502. feladat.

2. Az x_1, x_2, x_3 távolságok kifejezhetők a négy érintő kör sugaraival, r, r_1, r_2, r_3 -mal.

Ez összefüggések geometriai levezetésére vonjuk meg az ABC háromszögben (2. rajz) pl. a C szög belső és külső szögfelezőit, melyek a körülírt kört E -ben és F -ben messék.



Legyenek az érintő körök középpontjai O', O_1, O_2, O_3 ; vetületeik az AB oldalon sorra K', K_1, K_2, K_3 , a körülírt kör középpontja O , az AB oldal felezőpontja C_1 .

Úgy, hogy $CE \perp CF$ lévén, EF a körülírt kör átmérője: O -n keresztül megy; azonkívül a miatt, hogy AF ív $= FB$ ív: $EF \perp AB$, tehát C_2 is rajta van. Következésképpen:

$$EF \parallel O'K' \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2 \parallel O_3K_3.$$

Mindenekelőtt a C_2E távolságot fejezzük ki, mert

$$(3) \quad C_2E = R - x_3$$

lévén, ezzel x_3 -ra is nyertünk kifejezést. (Tompaszögű háromszögnél ($C < 90^\circ$) x_3 -at negatív jellel kell venni.) Fontoljuk meg erre nézve, hogy

$$AK_3 = BK',^2$$

tehát még:

$$C_2K_3 = C_2K',$$

amiből következik, $C_2E \parallel O'K' \parallel O_3K_3$ lévén, hogy

$$(4) \quad EO_3 = EO'.$$

O' -ből vonjuk $O'H \parallel AB$, amely egyenes EF -et G -ben találja. Minthogy $GO'E\Delta \sim HO'O_3\Delta$, a (4)-re való tekintettel

$$(5) \quad GE : HO_3 = 1 : 2.$$

De a rajzból láthatólag:

$$GE = GC_2 + C_2E = r + C_2E,$$

$$HO_3 = HK_3 + K_3O_3 = r + r_3,$$

amely értékeket (5)-be helyettesítve és C_2E -t meghatározva, ered:

$$(6) \quad C_2E = \frac{1}{2}(r_3 - r).$$

Ezt az egyenlőséget (3)-mal egybevetve kapjuk:

$$(7') \quad x_3 = R - \frac{1}{2}(r_3 - r).$$

² Rátz L. Math. Gyakorlókönyv II. k. 67. l. 498. feladat.

Az utolsó kifejezést még átalakítjuk, annak tekintetbe vételével, hogy

$$(8) \quad r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R^3$$

Innen ugyanis

$$R = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 - r),$$

amit (7')-be téve, lesz:

$$(7) \quad x_3 = \frac{1}{4}(-r_1 + r_2 + r_3 + r).$$

Egészen hasonló két kifejezést kaphatunk x_1 és x_2 -re.

Következmény. A (2) egyenletek alapján még ezeket nyerjük:

$$m'_1 = \frac{1}{2}(-r_1 + r_2 + r_3 + r),$$

$$(9) \quad m'_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2 + r_3 + r),$$

$$m'_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 - r_3 + r).$$

Megjegyzés. 1. A (8) egyenlőséget újólag bebizonyíthatjuk, csak C_2F -et kell kifejeznünk. A megelőzőhöz egészen hasonló megfontolásokból következik, hogy

$$(10) \quad C_2F = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Míthogy pedig

$$C_2F + C_2E = 2R,$$

a (6) és (10) egyenletek összeadása a (8) összefüggést igazolja.

2. A (9) kifejezések tompaszögű háromszögnél annyiban változnak, hogy a tompaszög csúcsán átmenő magasságdarabot negatív jellel kell venni.

3. *A háromszög csúcsaiból a rajtuk át nem menő két magassági vonalhoz vont párhuzamosok a körülírt körbe írt hatszöget határolnák, melynek területe egyenlő a háromszög területének kétszeresével.*

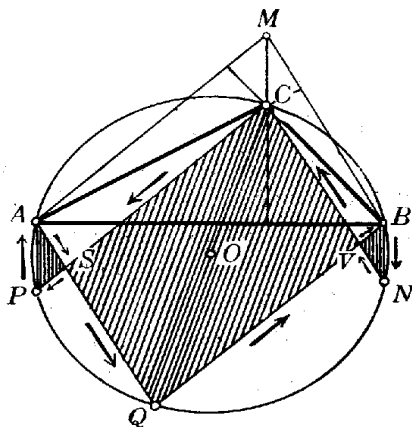
A hatszög legyen $AQBNC P$, ahol

$$AQ \parallel BM \parallel CN$$

stb. és azonkívül:

$$AQ = CN = m'_2, \quad AP = BN = m'_3, \quad BQ = CP = m'_1.$$

(a) Hegyesszögű háromszögnél az (1) pontban mondottak a bizonyítást megadják, ha megjegyezzük, hogy pl. $BNC\Delta \cong CMB\Delta$ (1. rajz).



(b) Tompaszögű háromszög esetében a hatszög kerülete önmagát metszi. Ezért ezt az esetet részletesebben kell tárgyalnunk. Mindenekelőtt értelmeznünk kell ilyen esetre a területet. Ennek módjáról már e lapokban volt szó.⁴

³L. Math. Gyakorlókönyv II. 68. l. 508. feladat.

⁴Lásd « Megjegyzések a talpponti háromszögről » c. közleményben K.M.L. IX. évf. 126. lapon; v.ö. Baltzer: Elemente der Mathematik III. k. 6. kiadás, 67–69. lap.

Ebben az esetben a kerület önmagát az S és V pontokban metszi (3. rajz). A hatszög területe most a $CSQV$ paralelogrammából és az APS , BVN háromszögekből áll. Ha a kerületet az $AQBNCPA$ rendben végig járjuk, a paralelogramma kerülete pozitív, a két háromszögé negatív körüljárású lesz, ezért a területet (T) az idézett helyen mondottak szerint így kell értelmeznünk:

$$\overline{T} = CSQV - APS - BVN.$$

Az oldalak párhuzamos volta miatt, és mert $AP = BN$

$$APS\Delta \cong BVN\Delta,$$

tehát

$$(11) \quad \overline{T} = CSQV - 2APS.$$

Másfelől vegyük tekintetbe, hogy a háromszög T területe így fejezhető ki:

$$T = ABC = ABM - CBM - ACM.$$

vagy egybevágó háromszögekkel helyettesítve:

$$T = AQB - APC - BCN.$$

Eszerint írhatjuk:

$$(12) \quad 2T = ABC + AQB - APC - BCN.$$

Azonban (a 3. rajzon láthatólag):

$$ABC + AQC = CSQV + ASC + BCV,$$

$$APC = APS + ASC,$$

$$BCN = BVN + BCV,$$

úgy hogy (12)-be helyettesítve ezt kapjuk:

$$(13) \quad 2T = CSQV - APS - BVN.$$

A (11) és (13) egybevetéséből ered végül

$$(14) \quad \overline{T} = 2T.$$

A hatszög minden esetben szimmetrikus, 3 pár csúcsának összekötő egyenesei (AN , BP , CQ) átmérők, s mindenik felezi az idomot.

Tompaszögű háromszög esetében csak a tompaszög csúcsából kiinduló átmérő (itt : CQ) halad a hatszög belsején át. CQ egyszersmind átlója a $CSQV$ paralelogrammának.

4. A megelőző pontban mondottakból következik, hogy

Mindig találhatunk olyan átmérőt, mely a hatszöget két egyenlő területű húrnégyszögre osztja. Ha $C \triangleleft$ a háromszög legnagyobb szögét jelöli, akkor mindenesetre:

$$(15) \quad AQCPA = T.$$

Evvel az elül jelzett tételnek első felét bebizonyítottuk.

5. A tétel második felének bebizonyítására térünk át. Legyen először ABC hegyesszögű háromszög. Meghatározzuk az $AQCPA$ négyszög területét az oldalaiból.

Legyen

$$QC = a', \quad CP = b', \quad PA = d', \quad AQ = c',$$

akkor (lásd 1. pont)

$$a' = 2R, \quad b' = m'_1, \quad c' = m'_3, \quad d' = m'_2.$$

Vegyük tekintetbe a (8) és (9) összefüggéseket, akkor lesz:

$$\begin{aligned} s' &= \frac{1}{2}(a' + b' + c' + d') = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + 4R) \\ &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 - r + 4R + 4r), \end{aligned}$$

vagy

$$(16) \quad s' = 2R + r,$$

továbbá

$$\begin{aligned} s' - a' &= r, \\ s' - b' &= 2R + r - \frac{1}{2}(-r_1 + r_2 + r_3 + r) \\ &= 2R + \frac{1}{2}(r + r_1 - r_2 - r_3). \end{aligned}$$

$2R$ -et (8)-ból kifejezve, összevonás után

$$s' - b' = r_1,$$

és hasonlóan:

$$(16') \quad s' - c' = r_2,$$

$$s' - d' = r_3.$$

Innen, a húrnégyszög területének ismert képletébe:

$$AQCPA = \sqrt{(s' - a')(s' - b')(s' - c')(s' - d')}$$

helyettesítve, (15)-re való tekintettel, ered:

$$(17) \quad T = \sqrt{rr_1r_2r_3}.$$

Tompaszögű háromszög esetében a négyszög területének képlete annyiban módosul, hogy c' -t mindenütt negatív jellel kell venni.⁵

A számítás maga, s így a (17) végső képlet nem szenved változást.

A 3 – 5. pontokban a (17) képletnek geometriai levezetése foglaltatik.

⁵L. K.M.L. XII. évf. 78. lapon.