

Első segédétel. Egyenlő kerületi hegyesszögekhez tartozó húrok viszonyai saját körük átmérőjéhez egyenlők.

Bizonyítás. Jelöljük a $2r_1$ illetve $2r_2$ átmérőjű körökben az α kerületi szöghöz tartozó húrok hosszait a_1 -gyel és a_2 -vel és válasszuk ki éppen azokat a kerületi szögeket, melyeknek egyik száruk átmegy a körök O_1 , illetve O_2 középpontján. Ez esetben két hasonló derékszögű háromszöget nyertünk, melyekből:

$$\frac{a_1}{2r_1} = \frac{a_2}{2r_2}.$$

Második segédétel. Ha két kerületi hegyesszöghöz tartozó húrok viszonyai saját körük átmérőjéhez egyenlők, akkor a két kerületi szög is egyenlő.

Bizonyítás. A $2r_1$ és $2r_2$ átmérőjű körökben az a_1 , illetve a_2 húrokra nyugvó kerületi hegyesszögek közül válasszuk ki éppen azokat, melyeknek egyik száruk átmegy a körök középpontjain. Minthogy az így keletkező két derékszögű háromszögben

$$\frac{a_1}{2r_1} = \frac{a_2}{2r_2},$$

azért a háromszögek hasonlóak és így az a_1 és a_2 húrokkal szemben fekvő kerületi hegyesszögek is egyenlők.

Nevezzük az α kerületi hegyesszöggel szemben fekvő (a) húr viszonyát az átmérőhöz ($2r$) az α szög sinusának

$$\sin \alpha = \frac{a}{2r},$$

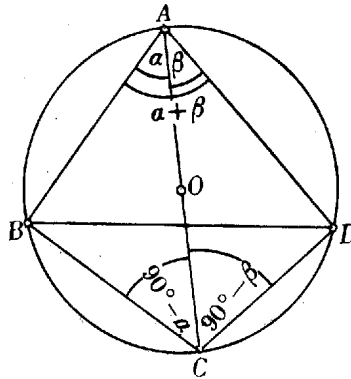
akkor az (1) és (2) segédétel így foglalható össze:

Valamely hegyesszög egyértelműleg határozza meg sinusát és valamely hegyesszög sinusa egyértelműleg határozza meg magát a szöget.

Minthogy a húr mindig kisebb az átmérőnél, azért valamely hegyes szög sinusa mindig pozitív valódi tört.

I. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek összege ismét hegyesszög, akkor

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \beta) + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta.$$



Bizonyítás. Mérjük az α és β szögeket az AC átmérő két különböző oldalára, úgy hogy $\angle CAB = \alpha$ és $\angle CAD = \beta$ legyen, akkor Ptolemaios tétele értelmében

$$BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Minden tagot $\overline{AC}^2$ -tel osztva

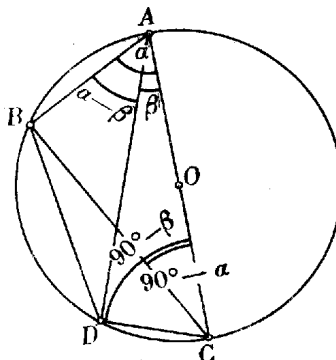
$$\frac{BD}{AC} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AC} + \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{AC}$$

vagyis:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \beta) + \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta.$$

II. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek közül $\alpha > \beta$, akkor

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ - \beta) - \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta.$$



Bizonyítás. Mérjük az α és β szögeket az AC átmérő két egyazon oldalára, úgy hogy $CAB \sphericalangle = \alpha$ és $CAD \sphericalangle = \beta$ legyen, akkor Ptolemaios tétele szerint:

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD - AB \cdot CD.$$

Ebből ismét

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{AC} - \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{AC},$$

tehát:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) - \sin(90^\circ - \alpha) \sin \beta.$$

Ha α hegyesszög, akkor $(90^\circ - \alpha)$ is az; ha $\sin(90^\circ - \alpha)$ -t ismerjük, akkor meghatározhatjuk $(90^\circ - \alpha)$ -t és ebből α -t is. Azt mondhatjuk tehát, hogy $\sin(90^\circ - \alpha)$ meghatározza az α -t és ebben a minőségben ezt az értéket az α szög cosinusának nevezzük:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Ez új jelölést bevezetve alaptételeink így alakulnak:

$$I. \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$II. \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

III. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek összege ismét hegyesszög:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \\ &= \sin(90^\circ - \alpha) \cos \beta - \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

ámde

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin[(90^\circ - (90^\circ - \alpha))] = \sin \alpha,$$

tehát

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

IV. alaptétel. Ha az α és β hegyesszögek közül $\alpha > \beta$, akkor

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Bizonyítás.

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin[(90^\circ - \alpha) + \beta] = \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

tehát

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Állapodjunk meg már most abban, hogy *bármely* szög függvényeit úgy akarjuk értelmezni, hogy az $I - IV$. alaptételek érvényben maradjanak. Bármely szögre nézve legyen tehát:

$$(I.) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(II.) \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$(III.) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$(IV.) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ha $\alpha = \beta$, akkor (II)-ből: $\sin \alpha = 0$.

Ha (I)-ben $\beta = 0$, akkor: $\sin \alpha = \sin \alpha \cos 0^\circ$,
vagyis

$$\cos 0^\circ = 1.$$

A (IV)-ből: $\alpha = \beta$ esetében: $\cos 0 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ha $\alpha = 0$, akkor (II)-ből: $\sin(-\beta) = -\sin \beta$

és (IV)-ből $\cos(-\beta) = \cos \beta$.

Ha $\alpha = \beta = 45^\circ$, akkor (I)-ből:

$$\sin 90^\circ = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \text{ és (III)-ból: } \cos 90^\circ = 0.$$

Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor (II)-ből: $\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$
és (IV)-ből:

$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta.$$

Ha $\alpha = \beta = 90^\circ$, akkor (I)-ből: $\sin 180^\circ = 0$
és (III)-ból

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Ha $\alpha = 180^\circ$, akkor (II)-ből: $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$
és (IV)-ből:

$$\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta.$$

Ha valamely $2r$ sugarú körben az $a_1, a_2, \dots, a_n$ húroknak megfelelő kerületi szögek $a_1, a_2, \dots, a_n$, akkor

$$(A) \quad a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = \sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 : \dots \sin a_n.$$

Ez a hurok sinustétele.

Háromszög esetén e tétel következtében

$$(A^*) \quad a : b : c = \sin \alpha \sin \beta : \sin \gamma.$$

Ha pl. n húr van adva, melyekkel szemben fekvő kerületi szögek közt m összefüggés van adva ($m < n + 1$), akkor fennáll a következő $(n + m)$ egyenlet:

$$a_i = 2r \sin a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$f_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (k(1, 2, \dots, m))$$

Eme $n + m$ egyenlet $2n + 1$ adatot tartalmaz, tehát általában $n - m + 1$ alkatrész megadása után a hiányzó $n + m$ adat kiszámítható. Érdekes az az eset, ha

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma \quad \text{és} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ez a négy egyenlet használható a háromszögek megoldásánál. Hogy a sinustétel hogyan nyerhető, már láttuk, még csak a Carnot-tételt akarom levezetni,

$$\sin \alpha = \sin[180^\circ - (\beta + \gamma)] = \sin(\beta + \gamma,)$$

tehát

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= [\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma]^2 = \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + \\ &+ 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma + (1 - \sin^2 \beta) \sin^2 \gamma = \\ &= \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) \end{aligned}$$

vagy

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(\beta + \gamma)$$

és így

$$(B) \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

Ebből ismét $4r^2$ -tel minden tagot szorozva:

$$(B^*) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Valójában tehát a Carnot-féle tétel három –együttvéve 180° -t kitevő – szög szögfüggvényeinek összefüggését fejezi ki.

Derékszögű háromszög esetén a következő öt egyenlet áll rendelkezésünkre:

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \gamma = 90^\circ,$$

tehát

$$c = 2r$$

és így az ismert tételek:

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \sin \beta = c \cos \alpha.$$

Ezekből ismét

$$c = a \frac{1}{\sin \alpha}, \quad c = b \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$a = b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad b = a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Szimmetria kedvéért szokásos bevezetni a következő új szögfüggvényeket:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

mely esetben derékszögű háromszögekben:

$$c = a \operatorname{cosec} \alpha, \quad c = b \operatorname{sec} \alpha, \quad a = b \operatorname{tg} \alpha, \quad b = a \operatorname{ctg} \alpha.$$

A rendelkezésemre álló szűk hely miatt csak e vázlatot közölhettem és így csak azok tanulhatnak belőle, kik a trigonometriával már amúgy is foglalkoztak. Célom az volt, hogy a goniometriát és trigonometriát, mint a hűrtan alkalmazásait mutassam be és közben az alapfogalmakat egész szigorúsággal állítsam oda.