

A stereometriában a polyederekről csupán egy általános tétel szokott a középiskolában tárgyalatni, az ú. n. *Euler-féle tétel*. A következőkben a rendelkezésemre álló források alapján kiegészítendem a tanulóknak a polyederekről szerzett ismereteit, még pedig oly részletekkel, melyek minden nehézség nélkül könnyen megérthetők, s a tanuló látókörét tágítani alkalmasak.

1. *Euler tétele*. Convex polyeder alatt oly zárt testet értünk, melynek bármely oldallapját határtalanul kiterjeszthetjük a nélkül, hogy ez a lap a testet két darabra vágna. E szerint a convex polyeder minden oldal lapjának csakis egyik oldalán terül el. Ezeket előrebocsátva, mondhatjuk, hogy: *minden convex polyedernél az éleknek 2-vel megnövesztett száma egyenlő a lapok és csúcsok összegével*.

A tankönyveinkben hagyományos bebizonyítás helyett a következőt hozom javaslatba, mely *Cauchy*-tól származott és egyszerűbb, valamint érthetőbb is amannál.

Behizonyítandó, hogy:

$$(1) \quad e + 2 = l + c.$$

Tekintsünk egyelőre egy összefüggő, de nyitott convex polyedrális felületet. Ennek széle síkban fekvő vagy térbeli polygon leszen. Erre az alakzatra nézve áll az

$$e + 1 = l + c$$

egyenlőség, a mit *teljes inductió* segítségével könnyen igazolhatunk. Ugyanis, ha a lapok száma $l = 1$, vagyis az alakzat egyetlen egy sík sokszögből áll, akkor a tétel közvetlenül világos; mert a sokszögben az élek száma egyenlő a csúcsok számával. Föltéve már most, hogy a tétel l számú lap esetében áll, csupán azt kell bebizonyítanunk, hogy $l + 1$ számú lap esetében is érvényes.

E célból csatoljunk a tekintetbe vett alakzathoz egy új lapot, melynek m oldala és m csúcsa legyen. Ha ezen új lapnak az alakzathoz való csatolása nem létesít zárt polyedert, akkor az új lap kerülete nem eshetik össze az alakzat szélével. Föltéve, hogy az új lapnak p számú éle esik egybe az alakzat szélével, akkor $p + 1$ csúcsa is közössé válik (mert 1 él 2 csúcsot, 2 él 3 csúcsot stb. köt össze). Ennélfogva az új lapnak még $m - p$ éle és $m - p - 1$ csúcsa marad szabadon. Az új lap hozzácsatolásával az eredeti alakzat lapjainak száma $(l + 1)$ -gyé vált, éleinek száma $(m - p)$ -vel, csúcsainak száma pedig $(m - p - 1)$ -gyel szaporodott, s így éleinek száma

$$e + m - p$$

csúcsainak száma pedig

$$c + m - p - 1.$$

Már pedig ezek az adatok eleget tesznek az

$$e + 1 = l + c$$

egyenlőségnek.

Tekintsünk már most egy zárt convex polyedert, és nyissuk ezt ki oly módon, hogy egyik oldallapját eltávolítjuk. Akkor az így előálló alakzatra érvényes főntebbi tételünk, a mennyiben az élek és csúcsok száma ugyanaz maradt, csupán a lapok száma csökkent 1-gyel. Így tehát a nyitott polyedrális lapra nézve

$$e + 1 = (l - 1) + c$$

honnét

$$e + 2 = l + c.$$

2. *Történeti adatok*. A tétel már az ókorban ismeretes lehetett; mert e nélkül *Archimedes* nem sorolhatta volna fel a *semi-reguláris* testeket. Előfordul a tétel *Descartes*-nál is (*Oeuvres inédites de D. par M. Foucher de Careil*. II. p. 214.), de nincsen explicite kifejezve. Ennélfogva valódi feltalálója *Euler*, ki ezt 1752-ben közölte, bebizonyításával együtt. (*Nov. comm. Petrop.* 4. p. 109. és 156.)

A *Cauchy*-féle bebizonyítás 1813-ban (*Journ. de l'École polyt. Cah. 16. p. 577.*) jelent meg. Vannak még számos más bizonyítások is, mint pl. *Grunert*-é (*Crelle Journ.* II. p. 367.); *Staudt*-é (*Geometrie der Lage* p. 49. 1847); *Thicme*-é, (Szt.-Pétervárról 1867. nov. 10-éről kelt levelében); *August*-é (a kölni realgymnasium 1854-iki értesítőjének 4. oldalán) végre *Legendre* (*Geom.* VII. 25.), *L'Huilier* (*Gergonne Annales* 1812. p. 178.) és *Steiner* (*Crelle Journ.* I. p. 364.) bizonyításai. A bizonyításoknak sokoldalúsága és nagy száma rendszerint a tétel kiváló fontossága mellett tanúskodik.

3. *A tétel következményei*. Tekintsünk ezek után egy oly polyedert, melynek oldallapjai közt van szám szerint: l_3 háromszögű, l_4 négyszögű, l_5 ötszögű ... lap. Akkor:

$$(2) \quad l = l_3 + l_4 + l_5 + \dots$$

és minthogy minden él két laphoz tartozik, tehát

$$(3) \quad 2c = 3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \dots$$

Az utóbbi egyenletből

$$3l_3 + 5l_5 + \dots = 2c - 4l_4 - 6l_5 - \dots$$

tehát

$$3l_3 + 5l_5 + \dots = \text{páros számmal.}$$

Vgyis: *a convex polyederben a páratlan oldalú oldallapok száma páros.*

Tekintsünk továbbá egy oly polyedert, melyen szám szerint L_3 trieder, L_4 tetraeder, L_5 pentaeder ... csúcs található. Akkor:

$$(4) \quad c = L_3 + L_4 + L_5 + \dots$$

és minthogy minden él két csúcst köt össze, tehát

$$(5) \quad 2c = 3L_3 + 4L_4 + 5L_5 + \dots$$

Az utóbbi egyenletből

$$3L_3 + 5L_5 + \dots = 2c - 4L_4 - \dots$$

tehát

$$3l_3 + 5l_5 + \dots = \text{páros számmal.}$$

Vagyis: *a convex polyederben a páratlan oldalú testszöglek száma páros.*

Ha az (1), (2) és (3) egyenlőségekből l és c kiküszöböltetnek, akkor

$$(6) \quad 2c = 4 + l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \dots$$

ha pedig az (1), (4) és (5) egyenlőségekből c és e kiküszöböltetnek, akkor

$$(7) \quad 2l = 4 + L_3 + 2L_4 + 3L_5 + \dots$$

származik

Ezek a tételek *Legendre*-től (Géom. Note 8.) származnak és *Gergonne*-tól (Ann. de Math. 15. p. 157.) egészítettettek ki. Segítségükkel néhány igen érdekes tételt bizonyíthatunk be.

4. *Minden convex polyederben a háromszögű oldallapok és a triederek számainak összege legalább is 8.*

Ugyanis az *Euler*-féle egyenletet 4-gyel sokszorozván:

$$4l + 4c = 4e + 8.$$

Itt l -et a (2) és c -t a (4) egyenletből helyettesítvén, $4e$ -t pedig a (3) és (5) egyenletek összegéből állítván elő:

$$4(l_3 + l_4 + \dots) + 4(L_3 + L_4 + \dots) = 8 + (3l_3 + 4l_4 + \dots) + (3L_3 + 4L_4 + \dots).$$

Ezt pedig így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} 4(l_3 + L_3) + 4(l_4 + L_4) + 4(l_5 + L_5) + \dots = \\ = 3(l_3 + L_3) + 4(l_4 + L_4) + 5(l_5 + L_5) + \dots + 8, \end{aligned}$$

más szóval:

$$(8) \quad l_3 + L_3 = 8 + (l_5 + L_5) + 2(l_6 + L_6) + \dots$$

a mi előrebocsátott tételünk helyessége mellett bizonyít.

5. *Olyan convex polyeder, a melynek minden oldallapja 5-nél többoldalú sokszög volna, nincsen.*

Ugyanis a (4) egyenlőség 3-szorosát az (5) egyenlőséggel összehasonlítva, azt találjuk hogy $2e > 3c$. Ebbe az egyenlőtlenségbe e -nek és c -nek értékeit a (8) ill. (6) egyenlőségekből helyettesítvén:

$$3l_3 + 4l_4 + 5l_5 + \dots > \frac{1}{2}(12 + 3l_3 + 6l_4 + 9l_5 + \dots)$$

$$6l_3 + 8l_4 + 10l_5 + \dots > 12 + (3l_3 + 6l_4 + 9l_5 + \dots)$$

$$(9) \quad 3l_3 + 2l_4 + l_5 > 12 + (l_7 + 2l_8 + \dots)$$

Innét az következik, hogy l_3 , l_4 és l_5 egyszerre nem lehetnek zérus értékűek, a mi előrebocsátott tételünknek megfelel.

6. *Olyan convex polyeder, a melynek minden csúcsában 5-nél több él találkoznék, nincsen.*

Ugyanis a (2) egyenlőség 3-szorosát a (3) egyenlőséggel összehasonlítva, azt találjuk, hogy $2e > 3l$. Ebbe az egyenlőtlenségbe e -nek és l -nek értékeit az (5) és (6) egyenlőségekből helyettesítvén:

$$3L_3 + 4L_4 + 5L_5 + \dots > \frac{1}{2}(12 + 3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \dots)$$

$$6L_3 + 8L_4 + 10L_5 + \dots > 12 + (3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \dots)$$

$$(10) \quad 3L_3 + 2L_4 + L_5 > 12 + (L_7 + 2L_8 + \dots)$$

Innét következik, hogy L_3 , L_4 és L_5 egyszerre nem lehetnek zérus értékűek, a mi előrebocsátott tételünknek megfelel.

7. *A tételek közti kapcsolatosság*, melynél fogva a (2) és (4) egyenlőségek, (3) és (5) valamint (6) és (7) egymással szembeállíthatók, az *Euler*-féle tétel azon tulajdonságának tudandó be, hogy a tétel az l és c mennyiségekre, vagyis a lapok és csúcsok számaira nézve szimmetrikus. Ez a kapcsolatosság olyan, mint a gömbháromszög és poláris gömbháromszöge közötti összefüggés. Minden adott polyedernek megfelel egy ugyanannyi élű poláris polyeder, ha az első minden m -oldalú testszögletének a másodiknak egy-egy m -oldalú oldallapja felel meg, és az első minden n -oldalú lapjának a második egy n -oldalú testszöglete felel meg. Ezt a polaritást 1532-ben *Maurolyeus* vette észre, *Kepler* (harm. mundi libri V.) és *Meister* (1785-ben Comm. Götting. VII. p. 39.) fejlesztették tovább. Általános érvényességű tételbe *Gergonne* foglalta.

8. *További következtetések* vonhatók le a (8), (9) és (10) egyenletekből. Ugyanis a (8)-ból következik, hogy *nincs olyan polyeder, a melynek egyidejűleg se háromszöglapja, se trieder csúcsa ne volna.*

(9)-ből, ha $l_3 = 0$ és $l_4 = 0$ az következik, hogy

$$l_5 > 12 + (l_7 + 2l_8 + \dots)$$

szóval: *az olyan polyedernek, a melynek se háromszögű, se négyszögű oldallapja nincsen, legalább is 12 ötszögű oldallapjának kell lennie.*

Ha (7)-ben l -et (2)-ből helyettesítjük, akkor

$$2(l_3 + l_4 + l_5 + \dots) = 4 + (L_3 + 2L_4 + 3L_5 + \dots)$$

származik. Ha pedig (6)-ban c -t (4)-ből helyettesítjük, akkor

$$2(L_3 + L_4 + L_5 + \dots) = 4 + (l_3 + 2l_4 + 3l_5 + \dots)$$

Ezekből új egyenleteket kapunk, ha az elsőnek 3-szorosához hozzáadjuk a másodiknak 2-szeresét.

$$\begin{aligned} 6l_3 + 6l_4 + 6l_5 + \dots + 4L_3 + 4L_4 + 4L_5 + \dots = \\ = 12 + 3L_3 + 6L_4 + 9L_5 + \dots + 8 + 2l_3 + 4l_4 + 6l_5 + \dots \end{aligned}$$

Innét:

$$4l_3 + 2l_4 + L_3 = 20 + (2L_4 + 5L_5 + 8L_6 + \dots) + (2l_6 + 4l_7 + \dots)$$

Ha itt föltételezzük, hogy $l_3 = 0$ és $l_4 = 0$, akkor:

$$L_3 = 20 + (2L_4 + \dots) + (2l_6 + \dots)$$

szóval: *az olyan polyederen, a melynek se háromszögletű, se négyszögletű oldallapja nincsen, legalább is 20 háromoldalú csúcsot találunk.*

Hasonlóképpen áll:

$$4L_3 + 2L_4 + l_3 = 20 + 2l_4 + 5l_5 + 8l_6 + \dots + 2L_6 + \dots$$

Ha itt föltételezzük, hogy $L_3 = 0$ és $L_4 = 0$, akkor

$$l_3 = 20 + (2l_4 + \dots) + (2L_6 + \dots)$$

szóval: *az olyan polyederen, a melynek se háromoldalú, se négyoldalú testszöglete nincsen, legalább is 20 háromszöglapot találunk.*

Hasonlóképpen még számos tételt állíthatunk fel.

9. *Szabályos testek.* Az *Euler*-féle tétel alapján könnyen kimutatható, hogy *csakis 5-féle olyan convex polyeder létezik, a melyeken minden oldallap ugyanannyi-oldalú sokszög és minden testszögleten ugyanannyi él találkozik.*

Ha az oldallapok n oldalú sokszögek, s a testszögletek m -élűek, akkor minden él két lapnak levén metszéspontja és két csúcsot kötve össze:

$$2e = nl = mc.$$

Ezen egyenlőségekkel az *Euler*-féle egyenlőségből e és c kiküszöböltetvén:

$$l = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Itt n -nek, rendre a lehetséges értékeket tulajdonítván, a következő esetek állanak elő:

(1)

$$n = 3, l = \frac{4m}{6-m}. \quad \begin{array}{ccc} \text{Ha } m = 3 \text{ akkor } l = 4 \\ \text{" } m = 4 \text{ " } l = 8 \\ \text{" } m = 5 \text{ " } l = 20 \end{array}$$

s így a *tetraeder*, *oktaeder* és *ikosaeder* származnak.

(2)

$$n = 4, l = \frac{2m}{4}. \quad \text{Ha } m = 3 \text{ akkor } l = 6$$

s így a *hexaeder* létesül.

(3)

$$n = 5, l = \frac{4m}{10-3m}. \quad \text{Ha } m = 3 \text{ akkor } l = 12$$

s így a *dodekaeder* keletkezik.

Minthogy $n = 6$ esetben

$$l = \frac{m}{3-m},$$

s így m -nek nem adhatunk elfogadható értéket; még kevésbé akkor, ha $n > 6$, tehát csakis ezek a polyederek lehetségesek.

Ezek az ú. n. *Plato*-féle testek, a mennyiben *Timaeus* és *Euclides* is *de anima mundi* című munkákban tétetik róluk említés. Róluk szól *Euclides* is (Elementa XIII.) és valószínű, hogy ismeretük a pythagoraeusokra vezethető vissza.

Ha a felsorolt testek oldallapjai egybevágó szabályos sokszögek, tehát testszögleteik is egybevágóak, akkor ezek a testek *szabályosak*. Mint azt az alábbi táblázat mutatja, megvan köztük a reciprocitás, a mennyiben az oktaederrel szembe helyezhető a hexaeder, a dodekaederrel szembe az ikosaeder, a teraeder önönmagának a conjugáltja.

A test neve	n	m	l	e	c
Tetraeder	3	3	4	6	4
Oktaeder	3	4	8	12	6
Hexaeder	4	3	6	12	8
Ikosaeder	3	5	20	30	12
Dodekaeder	5	3	12	30	20

A szabályos testekről elmondottakra a középiskolai tanítás is kiterjeszkedik, s ha itt tárgyaltuk, akkor ez csak a teljesség okáért történt.

10. *A convex polyederek lapjainak szögösszege* az eddigiek alapján könnyen megállapítható. A derékszöget egységül véve, az n -oldalú sokszög szögösszege $= 2n - 4$. Ha tehát a polyeder oldallapjai közt n , n' , n'' , ...-oldalú sokszögek vannak, a keresett szögösszeg:

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \dots$$

Ebben az összegben szám szerint l tag szerepelvén, tehát az így írható:

$$2(n + n' + n'' + \dots) - 4l.$$

Minthogy minden él két laphoz tartozik, tehát

$$n + n' + n'' + \dots = 2e$$

s így a szögösszeg $= 4(e - l)$. *Euler* tétele szerint azonban

$$e - l = c - 2$$

tehát a szögösszeg $= 4(c - 2)$.

Ezt tétel alakjában így fejezhetjük ki: *ha a derékszöget vesszük szögegységül, akkor minden convex polyederen az oldallapok szögösszege 4-szer akkora, mint a 2-vel kevesbített csúcsok száma.*

E szerint a platonikus testek lapjainak szögösszege a táblázat szerinti sorrendben 8, 16, 24, 40, 72 rectus. Ezekből az adatokból megállapíthatók a szabályos platonikus testek testszögleteiben az oldalak szögösszegei.