

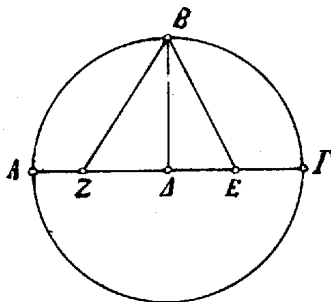
Ptolemaios.

Az „Almagest”.

A IX. fejezet címe: *A körbe írt egyenesek értékéről*. Rendkívül érdekes és fontos fejezet ez, mert nem egyéb, mint egy rendszeres goniometriai táblázat, melyet a kiszámításához szükséges elméleti vonatkozások előznek meg. Minden hosszadalmas magyarázat helyett legczélyszerűbb magát a szerzőt megszólaltatni:

„A gyakorlat könnyebbége végett egy táblázatot állítunk össze ez egyenesek értékéről, miközben a kerületet 360 fokra osztjuk fel. Táblázatunknak összes ívei fél fokkal növekednek, állandóan, és mi megadjuk ez ívek mindegyikéhez a húr értékét, azzal a föltevessel, hogy az átmérőt 120 részre osztottuk fel. A használat révén látni fogjuk, hogy ez a szám a legkényelmesebb, melyet választani lehet. Megmutatjuk előbb, miképpen készül oly tételek lehető legkisebb számának segítségével, melyek mindig ugyanazok, általános és pontos módszer amaz értékek meghatározására. Nem szorítkozunk azonban erre a táblázatra, a melyből ez értékeket kivehetjük, az elmélet ismerete nélkül, de megkönnyítjük az eszközöket, hogy azokat kipróbáljuk és igazoljuk, megadva a szerkesztési módszereket. Általánosságban a hatvanas számozást használjuk, hogy elkerüljük a törtek bonyodalmasságát; és a szorzásokban és osztásokban mindig a legmegközelítőbb eredményeket vesszük, oly módon, hogy az, a mit elhanyagolunk, nem zavarja meg azok pontosságát.”

Ezek után minden átmenet nélkül meghatározza a körbe írt szabályos ötszög és szabályos tízszög oldalát, oly módon, hogy a kör sugarának E felező pontjából (1. ábra) az EB hosszúságot az átmérőre leforgatja EZ -be és kimutatja, hogy $Z\Delta$ a szabályos tízszög és ZB a szabályos ötszög oldala.

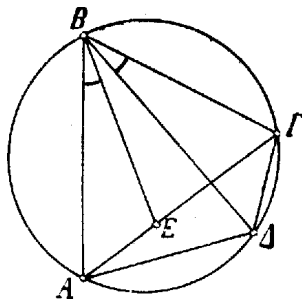


Most következik a legérdekesebb részek egyike: a goniometriai értékek kiszámítása. Ez a rész mindenekelőtt arra érdemes, hogy szó szerint ismertessük e helyen:

„Miután, mint mondtam, a kör átmérőjét felosztottuk 120 részre, ΔE , mely a sugár fele, 30 résznyi és négyzete 900. A $B\Delta$ sugár, 60 résznyi és négyzete 3600; de EB , vagyis EZ négyzete 4500: következőleg ennek az EZ vonalnak hossza $\xi\zeta\delta'\epsilon''$ (67 egész $\frac{4}{60}$ és $\frac{55}{3600}$ rész) és így ΔZ -nek a hossza $\lambda\zeta\delta'\nu\epsilon''$ (37 egész $\frac{4}{60}$ és $\frac{55}{3600}$ rész). Továbbá, mivel ΔZ maga $3\bar{7} 4'55''$, négyzete $137\bar{5} 4'15''$; de ΔB négyzete 3600 és e két négyzet összege egyenlő BZ négyzetével, mely ennél fogva $497\bar{5} 4'15''$, tehát BZ maga $7\bar{0} 32'3''$. Nyilvánvaló, hogy a szabályos hatszög oldala, mely 60° -ú ívet befog és mely a sugárral egyenlő, 60 részt foglal magában. Éppen így a négyzet oldalának, mely a kerületnek 90° -ját fogja be, a négyzete kétszerese a sugár négyzetének; és a háromszög oldalának, mely 120° -ot fog be, a négyzete háromszorosa a sugár négyzetének. De a sugár négyzete 3600 és így a négyzet oldalának négyzete 7200, a háromszög oldaláé pedig 10800. Ennél fogva az az oldal, mely a kerületnek 90° -ját fogja be, $8\bar{4} 51'10''$ és az az oldal, mely 120° -ot fog be, $10\bar{3} 55'23''$ résznyi hosszú.”

Ezek után hasonló módon kiszámítja még a 144° -ú ívhez tartozó húrt, melyet $11\bar{4} 7'37''$ hosszúnak talál, azután egyéb hurok kiszámítása céljából áttér a körbe írt négyszög tárgyalására és ennek folyamán levezeti azt a nevezetes tételt, mely Ptolemaios névvel kapcsolatosan ismeretes.

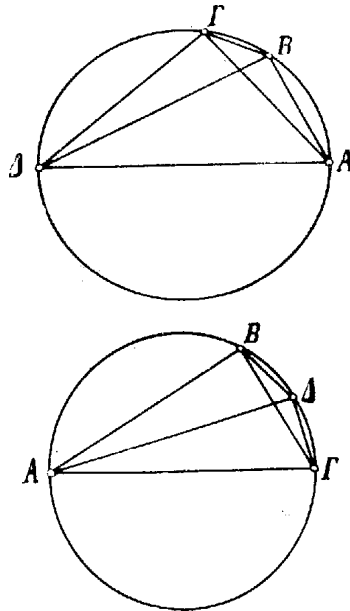
E tétel is arra érdemes matematikai fontosságánál és történeti érdekességénél fogva, hogy levezetését egész terjedelmében közöljük: „Legyen a körbe írt tetszőleges négyszög $AB\Gamma\Delta$; húzzuk meg az átlóit: $A\Gamma$ és $B\Delta$. Be kell bizonyítani, hogy az $A\Gamma$ és $B\Delta$ vonalokkal megszerkesztett téglalap egyenlő az AB és $\Gamma\Delta$ meg az $A\Delta$ és $B\Gamma$ szembenfekvő oldalakkal megszerkesztett téglalapokkal (mai kifejezéseinkkel: $A\Gamma \cdot B\Delta = AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma$).



Legyen ABE szög akkora, mint $\Delta B\Gamma$. Ha mindegyikhez hozzácsatoljuk a közös $EB\Delta$ szöget, az $AB\Delta$ szög akkora lesz, mint az $EB\Gamma$ szög. De $B\Delta A$ és $B\Gamma E$ szögek egyenlők egymással, mert ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek.

Tehát az $AB\Delta$ és $B\Gamma E$ háromszögek egyenlő szögűek. Ennélfogva $B\Gamma$ úgy aránylik a ΓE -hez, mint $B\Delta$ a ΔA -hoz. Így $B\Gamma A\Delta$ (értsd: $B\Gamma \cdot A\Delta$) annyi, mint $B\Delta \cdot \Gamma E$. Továbbá, mivel ABE szög egyenlő $\Delta B\Gamma$ szöggel és BAE szög egyenlő $B\Delta\Gamma$ szöggel, az ABE és $B\Gamma\Delta$ háromszögek is egyenlő szögűek; ennélfogva BA úgy aránylik az AE -hez, mint $B\Delta$ a $\Delta\Gamma$ -hoz. Így $BA \cdot \Delta\Gamma$ annyi, mint $B\Delta \cdot AE$. Kimutattuk tehát, hogy $B\Gamma \cdot A\Delta$ akkora, mint $B\Delta \cdot \Gamma E$. Következésképpen az egész $A\Gamma B\Delta$ négyszög akkora, mint az $AB\Delta\Gamma$ és $A\Delta B\Gamma$ négyszögek. Ezt kellett kimutatni."

Hogy mi célból volt szüksége Ptolemaiosznak erre a tételre, az a következőkből derül ki. A körbe írt négyszög egyik oldalának a kör átmérőjét ($A\Delta$) veszi, másik két oldalának pedig oly húrokat, melyeket már ismer, pl. AB és $A\Gamma$ húrokat. Mivel tehát most már az $AB\Gamma\Delta$ húrnégyszögnek két átlóját és három oldalát ismeri, kiszámíthatja a $B\Gamma$ ívhez tartozó $B\Gamma$ húr hosszát is. Így egyebek között a 72° -ú és 12° -ú ívekhez tartozó húrokból a 12° -ú ívhez tartozó húr.



Továbbá meg tudja határozni egy kis segédszerkesztéssel a $B\Gamma$ ívhez tartozó ismert $B\Gamma$ húrból a $\frac{B\Gamma}{2}$ ívhez tartozó $\Delta\Gamma$ húr nagyságát is. „Így például a 12° -ú szöghöz tartozó húrból megtaláljuk a 6° -ú, a 3° -ú, az $1\frac{1}{2}^\circ$ -ú és a $\frac{3}{4}^\circ$ -ú ívhez tartozó húrokat. A számítás által azt találjuk, hogy az $1\frac{1}{2}^\circ$ -ú ívhez tartozó húr $1^\circ 34' 15''$ és a $\frac{3}{4}^\circ$ -hoz tartozó húr $0^\circ 47' 8''$."

Végre pedig, miután két szöghöz tartozó húrokból kiszámította az e szögek összegéhez tartozó húr nagyságát, a nagyon kis szögekhez: az 1° - és $\frac{1}{2}^\circ$ -ú szögekhez tartozó húrokat határozza meg, ez esetben már egyszerű arányosság révén.

És most mindezek után következik maga a táblázat, az ókori matematikai munkálkodásnak egyik legérdekesebb és legbecsesebb gyümölcse. Mivel az *Almagest* kiadásához meglehetősen ritkán lehet csak hozzá férni, a táblázat pedig nagyon is arra érdemes, hogy megismerjük, nem tartom fölösleges dolognak, hogy egyes töredékeit e helyen bemutassam. Itt közlöm a táblázat kezdetét, mellette a magyar fordítását, illetőleg mai számainkkal való értelmezését:

KANONION TΩN EN KYKΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ										A körbe irt húrok táblázata									
ΠΕΡΙΦΕ- ΡΕΙΩΝ		ΕΥΘΕΙΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ					Ivek		Húrok			Az 1'-nyi különbségek				
Μοιρῶν		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.		fok	perc	ré- szek	1 00 ré- szek	1 3600 ré- szek	ré- szek	1 00 ré- szek	1 3600 ré- szek	1 216000 ré- szek	
δ	c	δ	λα	κε	δ	α	β	ν		0	30	0	31	25	0	1	2	50	
α	δ	α	β	ν	δ	α	β	ν		1	0	1	2	50	0	1	2	50	
α	c	α	λδ	ιε	δ	α	β	ν		1	30	1	34	15	0	1	2	50	
β	δ	β	ε	μ	δ	α	β	ν		2	0	2	5	40	0	1	2	50	
β	c	β	λζ	δ	δ	α	β	μν		2	30	2	37	4	0	1	2	48	
γ	δ	γ	η	ζη	δ	α	β	μν		3	0	3	8	28	0	1	2	48	
γ	c	γ	λθ	νβ	δ	α	β	μν		3	30	3	39	52	0	1	2	48	
δ	δ	δ	ια	ις	δ	α	β	μζ		4	0	4	11	16	0	1	2	47	
δ	c	δ	μβ	μ	δ	α	β	μζ		4	30	4	42	40	0	1	2	47	
ε	δ	ε	ιδ	δ	δ	α	β	μς		5	0	5	14	4	0	1	2	46	
ε	c	ε	με	κζ	δ	α	β	με		5	30	5	45	27	0	1	2	45	
ς	δ	ς	ις	μθ	δ	α	β	μδ		6	0	6	16	49	0	1	2	44	
ς	c	ς	μν	ια	δ	α	β	μγ		6	30	6	48	11	0	1	2	43	
ζ	δ	ζ	ιθ	λγ	δ	α	β	μβ		7	0	7	19	33	0	1	2	42	

A második rovatban található c jel, mint a görög α betű fele, $\frac{1}{2}$ fokot jelent.

Nem tartjuk érdektelen vagy hiábavaló dolognak, ha kissé mélyebben bocsátkozunk e táblázat fejtegetésébe és egy-egy adatának utána számításába. A táblázat első sora megadja a $0^{\circ}30'$ -nyi ívhez tartozó húr nagyságát az átmérő $\frac{1}{120}$ részeiben kifejezve, mint a hogy minden sor az általános φ szöghöz tartozó húr:

$$a = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 120 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$$

nagyságát adja meg. Ennélfogva az első sorbeli húr értéke:

$$a = 120^{\circ}30' \sin^{\circ} 15' = 120 \cdot 0,0043635 =$$

$$= 0,52362 = 31 \left(\frac{1}{60} \right) + 25 \left(\frac{1}{36000} \right),$$

tehát csakugyan $\delta\lambda\alpha'\chi\epsilon''$, a mint Ptolemaios a szövegben jelölte.

Mivel pedig látja, hogy kis szögekhez tartozó húrok korlátolt pontossággal arányosak a szögekkel (hiszen még a 2° -ú szöghöz tartozó húr $2^{\circ}5'40''$ is kétszer akkora, mint az 2° -ú szöghöz tartozó húr: $1^{\circ}2'50''$), bátran térhet át a $0^{\circ}30'$ -nél kisebb szögekhez tartozó húrokra egyszerű arányosság útján. Ha tehát a $0^{\circ}30'$ -nyi szöghöz tartozó húr: $0^{\circ}31'25'' = 0,52362$ értékét elosztja 30-cal, megkapja az 1'-nyi szöghöz tartozó húr nagyságát ez értékben:

$$0,017454 = 1 \left(\frac{1}{60} \right) + 2 \left(\frac{1}{3600} \right) + 50 \left(\frac{1}{216000} \right),$$

a mint azt a táblázatban csakugyan így meg is találjuk.

Ugyane rovat többi sorai pedig szintén arányos részek, melyek szerint a kis szöghöz tartozó húrkülönbségek korlátolt pontossággal változnak. Ezek tehát egyszerűen az 1'-hez tartozó arányos részek, mint a milyeneket a mi logarithmus-könyveinkben is találunk.

Ptolemaios táblázatát tovább kísérve, még a következő nevezetesebb szögekhez tartozó húrokat említhetjük meg:

$$\parallel \xi \mid \delta \parallel \xi \mid \delta \mid \delta \parallel \delta \mid \delta \mid \nu\delta \mid \kappa\alpha \parallel \parallel 60 \mid 0 \parallel 60 \mid 0 \mid 0 \parallel 0 \mid 0 \mid 54 \mid 21 \parallel$$

mert a 60° -ú szöghöz tartozó húr akkora, mint a sugár, tehát 60 egység; érdekesebb sor továbbá ez:

$$\parallel \zeta \mid \delta \parallel \pi \delta \mid \nu \alpha \mid \iota \parallel \delta \mid \delta \mid \mu \delta \mid \varkappa \parallel \parallel 90 \mid 0 \parallel 84 \mid 51 \mid 10 \parallel 0 \mid 0 \mid 44 \mid 20 \parallel$$

mert a 90°-ú szöghöz tartozó húrnak, vagyis a körbe irt négyzet oldalának nagysága

$$r\sqrt{2}=60\cdot 1,414213=84+51\left(\frac{1}{60}\right)+10\left(\frac{1}{3600}\right).$$

Végre pedig a táblázat utolsó sora ez:

$$\parallel \varrho \pi \mid \delta \parallel \varrho \varkappa \mid \delta \mid \delta \parallel \delta \mid \delta \mid \delta \mid \delta \parallel \parallel 180 \mid 0 \parallel 120 \mid 0 \mid 10 \parallel 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \parallel$$

mert a 180°-ú szöghöz tartozó húr maga az átmérő, vagyis 120 egység.

Mindezekből azt látjuk, hogy Ptolemaios táblázatának tartalma nem egyéb, mint a szögek sinusai, melyeknek értékei az iskolai logaríthmus-könyvekben rendesen a II. táblázatban megvannak. Hiszen a Ptolemaios-féle táblázatból minden szög sinusát lehet kiszámítani: Ptolemaios-féle adatot csak el kell osztani 120-szal és megvan az illető szög felének a sinusa.