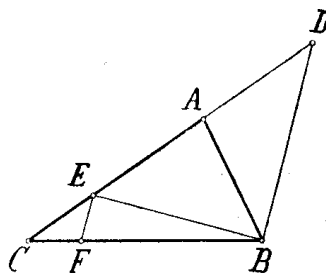


A *Bulletin de sciences math. et phys. élément.* ötödik kötetében a tangens-tétel következő geometriai bizonyításait közli:

I. Legyen az ABC háromszögben $b > c$. Mérjük AC -re A -tól jobbra és balra AB -t, úgy hogy $AD = AE = AB$. Rajzoljuk meg a BD és BE egyeneseket s húzzuk meg végre az EF egyenest párhuzamosan BD -vel.



Minthogy

$$\angle EBF = \frac{B-C}{2} \text{ és } \angle D = \frac{A}{2},$$

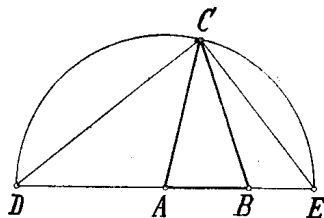
azért

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{EF}{BE} = \frac{EF}{BD \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{EF}{BD} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{CE}{CD} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

s így

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}} = \frac{b-c}{b+c}.$$

II. $b > c$ s így $B > C$. Legyen $AD = AE = AC$.



A CAD és CAE egyenlőszárú háromszögekben, továbbá a CDE derékszögű háromszögben:

$$\angle D = \frac{A}{2}, \quad \angle E = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

$$\angle BCE = \frac{B-C}{2},$$

$$\angle BCD = 90^\circ - \frac{B-C}{2}.$$

A BCD és BCE háromszögekre alkalmazva a sinus-tételt, ered:

$$\frac{b+c}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{a}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \frac{b-c}{\sin \frac{B-C}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}.$$

A két egyenletet egymással elosztva, ered:

$$\frac{b+c}{b-c} \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$