

R. Badia, olasz tanár, a *Journal de Math. Élément.* 25. kötetében a gömb köbtartalmának meghatározására következő eljárást mutatja be.

1. Ha n pozitív egész szám, akkor az

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

kifejezés határértéke $\frac{1}{3}$, ha n határtalanul nő.

Ha ugyanis a pozitív egész szám, akkor

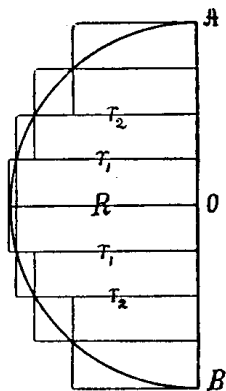
$$\frac{(a+1)^3 - a^3}{3} > a^2 > \frac{a^3 - (a-1)^3}{3},$$

miből, ha a helyébe rendre 1, 2, 3, ..., $n-1$ -et teszünk s a nyert kifejezéseket összeadjuk:

$$\frac{1 - \frac{1}{n^3}}{3} > \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} > \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{3},$$

mely egyenlőtlenség végtelen nagy n esetében állításunkat igazolja.

2. Legyen O a félkör középpontja, AB az átmérője. AB -t felosztjuk $2n$ egyenlő részre, az osztási pontokon át az átmérőre merőlegeseket rajzolunk, azután ama pontokon át, melyekben eme merőlegesek a kör kerületét metszik, az átmérővel párhuzamosokat húzunk.



Ha most az egész idom az AB átmérő körül forog, akkor a keletkező gömböt körülveszi $2n$ henger, a gömb pedig magába zár $2(n-1)$ hengert.

Ha az egymásra következő hengerek alapjainak sugarát $R, r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$ -gyel, a nagyobb hengerek köbtartalmának összegét S -sel, a kisebbek köbtartalmának összegét pedig s -sel jelöljük, akkor:

$$S = (R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{2\pi R}{n},$$

$$s = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{2\pi R}{n},$$

miből

$$S - s = \frac{2\pi R^3}{n}.$$

Ha n határtalanul nő, $S - s$ közeledik 0 felé; S folyton kisebbedik, s folyton nő s mindkettőnek értéke megközelíti a gömb köbtartalmát. Ha n végtelenné lesz, akkor a gömb köbtartalma egyenlő a változó S és s határértékével, vagyis:

$$V = \lim S = \lim (R^2 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2) \frac{2\pi R}{n};$$

de

$$r_1^2 = R^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), r_2^2 = R^2 \left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right), \dots, r_{n-1}^2 = R^2 \left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right),$$

s így

$$V = \lim \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}\right) 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$