Geometriai szerkesztések kivitele alkalmával nem ritkán esik meg, hogy a szerkesztéshez szükséges tényezők nem állanak rendelkezésünkre. Már Steiner hangsúlyozza, hogy valamely feladatnak elvben való megoldása és a tényleges kivitel között nagy külömbség van és állítása helyességéről a constructív geometriában lépten-nyomon meggyőződhetünk, midőn külömben egyszerű feladatok kivitele kedvezőtlen felvétel okozta segédszerkesztések miatt válik bonyolulttá.

Az említett körülmény oka physikai segédeszközeink korlátoltságában rejlik. Rajzlapunk határolt volta, vagy egyes szerkesztési elemek hasznavehetetlensége, arra kényszerítenek bennünket, hogy ily viszonyokkal is számoljunk és az akadályok ellenére is kivigyük a kitűzött szerkesztést. A feladatoknak ily viszonyok között való megoldásának fontosságára szintén már Steiner hívja fel a figyelmet egy kisebb művéhez írt jegyzetek között.

E czél elérése már tisztán elméleti szempontból is érdekes. Érdekes már magában az is, hogy valamint pusztán körzővel és vonalzóval az összes geometriai szerkesztések megoldhatók, úgy kimondhatjuk azt is, hogy *bizonyos szerkesztési elemek hozzáférhetetlensége esetében is az összes geometriai szerkesztések megoldhatók.* De fontos dolog a gyakorlatban is. A constructív geometriában hányszor vagyunk kénytelenek ilyen szerkesztésekhez fordulni részben egyes szerkesztési elemek hozzáférhetetlensége miatt, részben azért, mert azok megbízhatatlanságuk miatt hasznavehetetlenek (hegyes metszés) és bár ily esetekben a constructív geometria saját, a térszemléleten alapuló, módszereit alkalmazza, más általánosabb és gyakran egyszerűbb módszerek ismerete is szükséges.

Természetes dolog, hogy e feladatok megoldásánál ismernünk kell előbb a megfejtést azon esetre, midőn az összes segédeszközök rendelkezésünkre állanak. Különös is volna, ha oly feladatokat, melyeket még e legkedvezőbb viszonyok között sem tudunk megoldani, e viszonyok gyakran tetemes megszorítása mellett próbálnók megfejteni.

A mondotton alapszik éppen két módszere az e feladatok megoldásának. Ezek a tükörképezés és a párhuzamos eltolás módszerei.

Mindkét módszer alapgondolata a kitűzött szerkesztést oly helyre átvinni, hol az akadály nélkül kivihető és a tényleg végrehajtott szerkesztés után az eredményeket rendeltetési helyökre visszavinni.

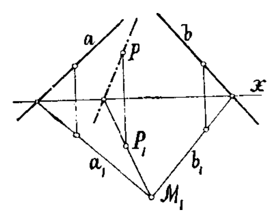
Egy harmadik módszer a projektív geometria tételei alapján oldja meg a hozzáférhetetlenségi feladatokat. E módszer a legelegánsabb, bár gyakran nem a legegyszerűbb és egyik kiválósága a másik kettő felett az, hogy alkalmazhatósága kevésbé függ a rendelkezésünkre álló hely nagyságától, mint az előbbieké, éppen azért, mert a szerkesztést ott helyben végzi és nem teszi előbb át más helyre.

Síkidomok között fennálló hasonlóság, arányosság is gyakran előnnyel alkalmazhatók ily feladatok megoldásánál.

E módszereket azonban nem kívánom itt behatóbban tárgyalni, hanem mindegyiket néhány alapfeladaton, mint példán felvilágosítani.

Két egyenesnek a rajzlapon kívül eső metszéspontjába rajzoljunk adott pontból egyenest.

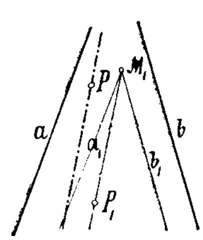
1. Messük az a és b egyeneseket tetszőleges egyenessel és állítsuk elő a, b és P-nek x-re vonatkozó tükörképét a_1-et, b_1-et és P_1-et.



Az a_1, b_1 egyenesek M_1 metszéspontját P_1-gyel összekötő egyenes x-et X-ben metszi. PX a keresett egyenes.

Czélszerű az x egyenest az adott egyenesek egyikére merőlegesen felvenni, miáltal az egyik tükörkép szerkesztése feleslegessé lesz. Ha az x egyenest még P ponton át rajzoljuk, e pont is összeesik tükörképével, de e megtakarítás csak látszólagos, a mennyiben aztán utóbb kellene valamely tetszőleges pont tükörképét megszerkeszteni.

2. Rajzoljunk a-val és b-vel párhuzamosan tetszőleges a_1-et és b_1-et és azután oly P_1 pontot, melynek távolsága a_1, illetőleg b_1-től ugyanakkora, mint P ponté a, illetőleg b-től. P_1-et összekötjük a a_1 és b_1 metszéspontjával és ez összekötő egyenessel P-ből párhuzamost rajzolunk.



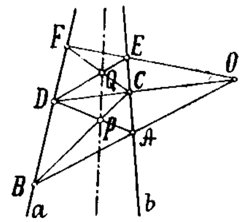
E szerkesztés igazolását a párhuzamos eltolás definícziójában leli.

Czélszerű az egyik egyenest önönmagán eltolni, miáltal még a P_1 pont meghatározása is egyszerűsbül.

Projektív geometriai úton e feladat pl. a *Desargues*-féle tétel segélyével oldható meg. (Lásd K. M. L. VIII. évf. 3. sz.) Ugyanott oldottuk meg ezen feladatot is:

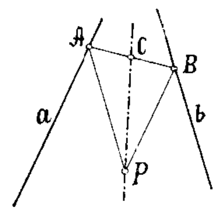
Egy a rajzlapon kívül eső pontból adott egyenessel párhuzamos egyenest rajzolni.

Egy másik a teljes négyoldal harmonikus tulajdonságain alapuló és Lambert-től való megoldása a feladatnak a következő:



P-n át tetszőleges $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ egyeneseket rajzolunk. $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ egyenesek O metszéspontjából a tetszőleges $\overline{OEF}$ egyenest rajzoljuk. A $\overline{CF}$ és $\overline{DE}$ egyenesek Q metszéspontját P-vel összekötő egyenes a keresett megoldás.

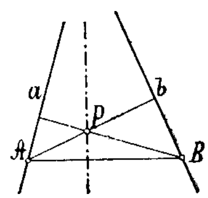
E feladat megoldható még így is: P-ből a-val és b-vel $\overline{PB}$, illetőleg $\overline{PA}$ párhuzamosakat vonjuk. Ezután $\overline{AB}$ egyenes C felezőpontját megszerkesztve $\overline{PC}$ a keresett egyenes.



E szerkesztés azzal indokolható, hogy A, B, P és az a és b egyenesek kívül eső metszéspontja által meghatározott idom parallelogramma, melynek átlói, mint ismeretes, felezik egymást.

Ez egyszerű alapfeladatot azért tárgyaltuk oly behatóan, hogy az összes módszerek alkalmazását láthassuk, a következőkben már csak egy-egy ily módszer felhasználásával oldjuk meg a feladatokat. Mielőtt azonban e feladatot elhagynók, annak még egy megoldását mutatjuk be, mely mindjárt egy újabb alapfeladat megoldására vezet.

Bocsássunk P-ből a-ra merőlegest, mely b-t B-ben metszi, azután P-ből b-re merőlegest, mely A-ban metszi a-t. A P-ből $\overline{AB}$-re bocsátott merőleges a keresett egyenes, mely átmegy a és b metszéspontján.



E szerkesztés azzal indokolható, hogy a szerkesztés alapján P az $AB(ab)$ háromszögnek magassági pontja, melyen át a háromszög harmadik magasságát rajzoltuk. Ezzel összefüggésben tárgyalható a következő feladat.

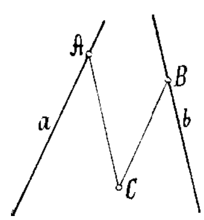
Két egyenesnek a rajzlapon kívül eső metszéspontjába szerkesszünk adott egyenessel párhuzamos (vagy a mi ezzel egyenértékű, adott egyenessel adott szöget bezáró) *egyenest.*

E feladat igen könnyen oldható meg a tükörkép-módszerrel, de szebb megoldás az, ha a megelőző feladat utolsó megoldása szerint fejtjük meg.

Az adott egyenesre tetszőleges merőlegest rajzolunk, mely a két adottat A, illetőleg B-ben metszi. Megrajzolva az A és B csúcsokhoz tartozó magasságokat, az M magassági pontot kapjuk, melyen át most a harmadik magasságot megrajzoljuk.

Két egyenesnek hozzáférhetetlen metszéspontjából mérjünk az egyikre adott d hosszat.

Ha az adott hosszat pl. a-ra akarjuk mérni, akkor a-val tetszőleges párhuzamosat rajzolunk és erre a $\overline{BC} = d$ hosszat mérjük. A C-ből rajzolt párhuzamos a-t a keresett A pontban metszi.



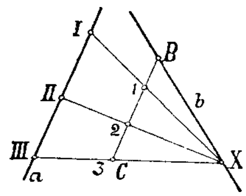
Az eddig tárgyalt két feladat kombinációja alapján oldható meg a következő feladat:

Adva van egy kör középpontja, két egymást a rajzlapon kívül metsző egyenes által és sugara; határozzuk meg a kerület tetszőleges számú pontjait.

A megoldás úgy történik, hogy először az első feladat alapján a kör kívül eső középpontján átmenő tetszőleges számú egyenest rajzolunk, a melyek mindegyikére a fentebbi módon az adott sugarat rámérjük.

Adott egyenes, melynek egyik végpontja hozzáférhetetlen, osztassék n egyenlő, illetőleg adott arányú, $(p : q)$ részekre.

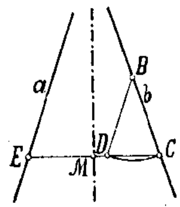
Az adott a egyenessel tetszőleges párhuzamost rajzolunk. A b egyenes tetszőleges X pontját $A(III)$-val összekötjük és most $\overline{BC}$-t osztjuk adott arányban, ill. n egyenlő részre. Az osztópontokat X-szel összekötő egyenesek az adott egyenest a keresett osztópontokban metszik.



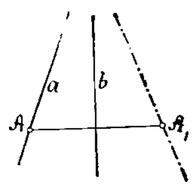
Egészen analóg eljárás az is, *mellyel adott hosszúságú egyenes darabot, ha egyik végpontja hozzáférhetetlen, sokszorosítunk.*

Felezzük, illetőleg kétszerezzük meg két egymást a rajzlapon kívül metsző egyenes szögét.

A szög egyik szárával pl. a-val tetszőleges BD párhuzamost rajzolunk. B-ből tetszőleges sugarú ívet rajzolunk, mely b-t C-ben, BD-t D-ben metszi. A CDE egyenes M felező pontjában emelt merőleges a keresett szögfelező.

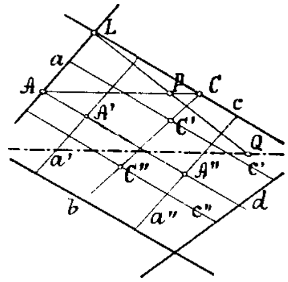


Ha a szög kétszeresét keressük, előállítjuk A pontnak b-re való A_1 tükörképét. Az a_1-et az egyenesek kívül eső metszéspontjával összekötő egyenes a keresett szög másik szára.



Adva van egy egyenes két oly pont által, melyek mindegyike egymást a rajzlapon kívül metsző egyenesek által van meghatározva. Rajzoljuk meg az egyenest, ha az a rajzlapon belül esik.

A szerkesztés következő: a egyenessel a' és a'', b-vel c' és c'' párhuzamosokat rajzoljuk. a', a'',c' c'' felező pontjai rendre A', A'', C', C''.

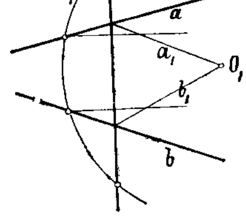


Jelöljük a, b, ill. c, d kívül eső metszéspontjait M-mel, illetőleg N-nel, akkor világos, hogy $\overline{A'A''}$, $\overline{LM}$-et annak A felezőpontjában, hasonlóan $\overline{C'C''}$, $\overline{LN}$-et annak C felező pontjában metszi. Kössük össze A-t C-vel. L-ből tetszőleg rajzolt egyenes $\overline{AC}$-t P-ben metszi. Az $\overline{LP}$ egyenesre $\overline{PQ} = \overline{LP}$ darabot mérve, Q-ból $\overline{AC}$-vel párhuzamost rajzolunk, mely a keresett egyenest adja. A szerkesztés helyessége az $LMN\triangle$ és $LAC\triangle$ hasonlóságából folyik. A szerkesztésnél felezés helyett tetszőleges arányban való osztás is használható, mely azután minden helyen szem előtt tartandó.

Térjünk most át a következő két feladatra:

Adva van egy kör hozzáférhetetlen középpontja, kerületének egy pontja meg egy egyenes; szerkesszük meg az egyenesnek a körrel való metszéspontját.

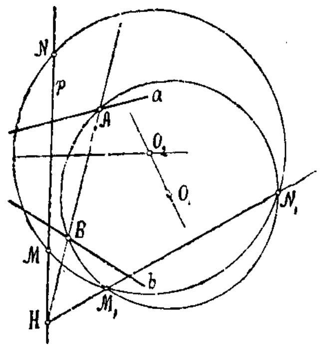
A tükör képezési módszerrel az eljárás a következő: Ha a középpont a és b egyenesek által van adva, megszerkesztjük a P kerületi pont tükörképét a metsző egyenesre P_1-et, továbbá az a_1 és b_1 tükörképeket, melyek egymást OI-ben metszik. Az O_1-ből O_1P_1-gyel rajzolt kör az egyenest a keresett M és N pontokban metszi.



Egy másik megoldása a feladatnak, mely általánossága miatt alkalmasabb, a következő:

Legyen adva az a és b egyeneseken a kör A és B pontja. Ezeket, ha megadva nem volnának, hanem akár a sugár, akár egy tetszőleges P pontja a körnek volna adva, egy előző feladat alapján mindig megszerkeszthetjük.

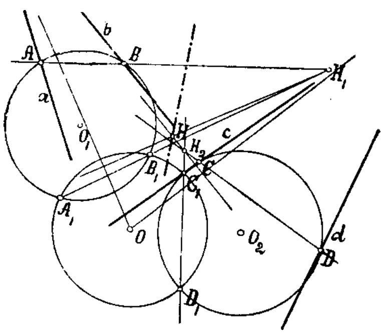
A-n és B-n tetszőleges sugárral kört rajzolunk, melynek O_1 a középpontja. Az adott p szelő $\overline{AB}$-t H pontban metszi. H-ból tetszőleges szelőt rajzolunk, mely az O_1 kört M_1 és N_1 pontokban metszi.



Az O_1-ből M_1N_1-re bocsátott merőleges a hozzáférhetetlen középpontból ismert módon p-re rajzolt merőlegest O_2-ben metszi. Az O_2-ből $\overline{O_2M_1} = \overline{O_2N_1}$ sugárral rajzolt kör a p-t a keresett M és N pontokban metszi. E szerkesztés azzal indokolható, hogy H a három kör hatványpontja és hogy p a megadott és az O_2 kör hatványvonala.

A hatványvonal felhasználásával oldható meg *két kör metszésének feladata is középpontjaik hozzáférhetetlensége esetében.* E feladat az előbbire következőleg vezethető vissza: Ha megszerkesztjük a két kör hatványvonalát a feladat egyenes és kör metszésére van visszavezetve.

Legyen tehát adva a és b által az (ab) és c és d által a (cd) középpontú kör, továbbá az előbbinek A és B az utóbbinak C és D pontjai. Rajzoljunk most tetszőleges sugarú és A és B, illetőleg C és D-n átmenő O_1, ill. O_2 középpontú köröket, és messük ezeket tetszőleges O középpontú és sugarú segédkörrel. Legyenek a metszéspontok A_1, B_1, ill. C_1, D_1.



Kössük még össze O-t (ab)-vel és (cd)-vel. Az $\overline{AB}$ és A_1B_1 H_1 metszéspontjából $\underline{O(ab)}$-re bocsátott merőleges az (ab) és O körök hatványvonala, hasonlóan a CD és C_1D_1 H_2 metszéspontjából $\overline{O(cd)}$-re bocsátott merőleges (cd) és O körök hatványvonala, úgy hogy e két merőleges H metszéspontja nem egyéb, mint az (ab), (cd) és O kör hatványpontja. H-ból $\overline{(ab)(cd)}$-re rajzolt merőleges pedig az (ab) és (cd) körök hatványvonala. Ezzel a feladat az előbbire van visszavezetve.

Ez alapfeladatok tárgyalásánál, melyekre a legbonyolultabb szerkesztések is visszavezethetők, kimutattam, hogy egyes elemek hozzáférhetetlensége esetében is e feladatok mindig megoldhatók és pedig elég változatos módszerek alkalmazásával, melyek közül a körülményekhez képest célszerűen válogathatunk.