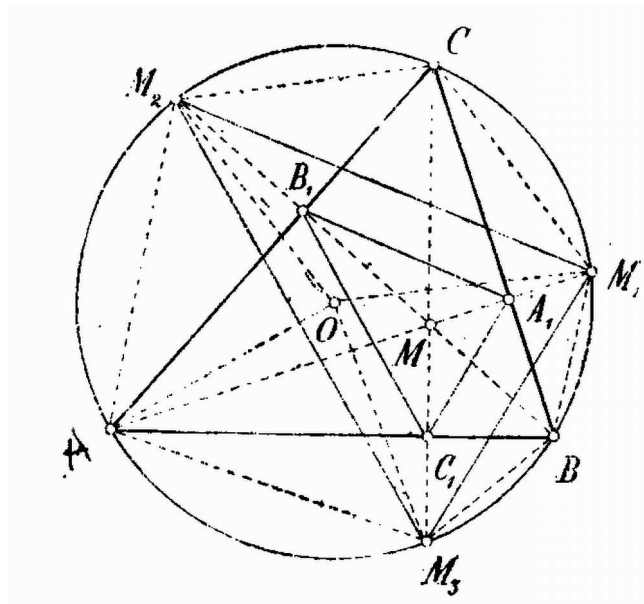


A talpponti háromszög tulajdonságait gyakran találjuk számítások segítségével bebizonyítva. A következő sorokban olyan tételre mutatok rá, a melynek alapján sok esetben a szorosabb értelemben vett geometriai módszerekre vihető vissza az említett tulajdonságok levezetése. Azután a tétel alkalmazására adok példát.

Az említett tétel a következő:

1. *A háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükröképei a háromszög köré írt körön fekszenek.*

Legyen az ABC háromszög magasságpontja M , a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon sorra A_1, B_1, C_1 ; a magasságpontnak ugyanezen oldalakra vonatkozó tükröképei M_1, M_2, M_3 .



Mint hogy M_1 az AA_1 meghosszabbításán van és $M_1A_1 = A_1M$, azért

$$BM_1A_1\trianglecong BMA_1\triangle$$

és

$$CM_1A_1\trianglecong CMA_1\triangle$$

Tehát

$$BM_1 = BM$$

és

$$CM_1 = CM.$$

Ebből következik még:

$$BM_1C\trianglecong BMC\triangle,$$

úgy, hogy

$$(1) \quad BM_1C\angle = BMC\angle.$$

A további bizonyításban elválasztjuk a hegyes- és a tompaszögű háromszög esetét.

a) *Hegyszögű* háromszögben:

$$BMC\angle = 180^\circ - [90^\circ - B\angle + 90^\circ - C\angle]$$

azaz:

$$(2) \quad BMC\angle = 180^\circ - A\angle,$$

Tehát

$$BAC\angle + BM_1C\angle = 180^\circ,$$

a mi M_1 pontra a kimondott tételt igazolja.

b) *Tompaszögű* háromszögben: ($C\angle > 90^\circ$) most M külső pont lévén,

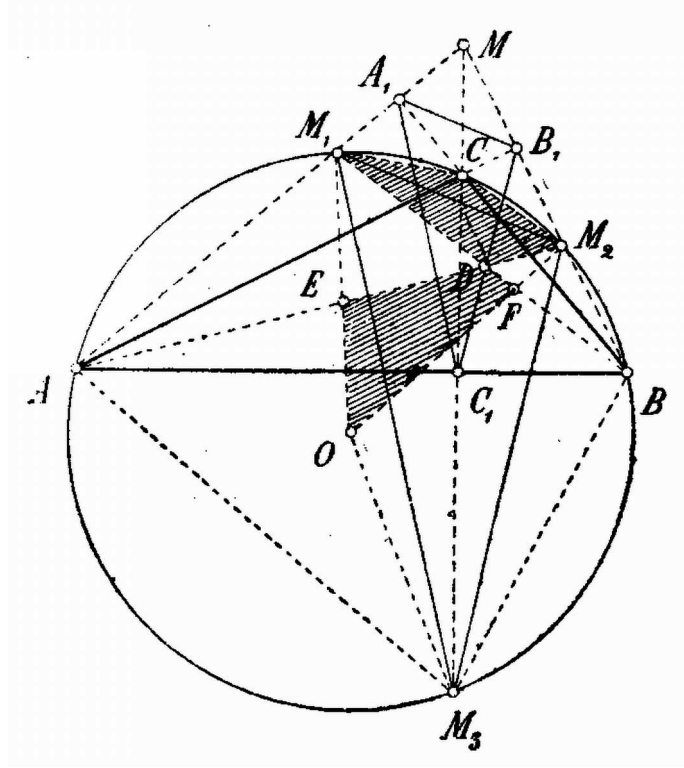
$$BMC\angle = 90^\circ - A_1BA\angle = 90^\circ - [90^\circ - A\angle]$$

$$(3) \quad BMC \triangleleft = A \triangleleft,$$

tehát

$$BM_1C \triangleleft = BAC;$$

a mi a tételt erre az esetre is helyesnek mutatja.



A bizonyítás M_2 pontra egészen hasonló, M_3 pontra nézve az $a)$ alatti bizonyítás tompaszögű háromszögnél is változatlan marad (ha $C \triangleleft > 90^\circ$).

Ennek a tételnek felhasználásával a *Feuerbach*-féle körre vonatkozó tételek egy része könnyen bizonyítható. Például ez:

2. A *Feuerbach*-féle kör sugara a háromszög köré írható kör sugarának fele.

Az ABC háromszög köré írható kör sugarát jelölje r , az $A_1B_1C_1$ köré írottét (A *Feuerbach*-féle körét) r_1 . Minthogy $M_1M_2M_3$ ugyanazon körbe van írva, mint ABC , azonkívül

$$M_1M_2M_3\triangle \sim A_1B_1C_1\triangle$$

és a hasonlóság arányszáma $2 : 1$, azért még

$$r : r_1 = 2 : 1,$$

a honnan

$$(4) \quad r_1 = \frac{1}{2}r$$

A háromszög területére nézve a következő tétel alapján nyerhetünk kifejezést:

3. A háromszög csúcspontjai és a magasságpont tükörképei meghatározta hatszög területe a háromszög kétszerese.

Itt újra külön kell választanunk a hegyes- és tompaszögű háromszög esetét.

$a)$ *Hegyszögű* háromszög esetében az előbbi jelölésekkel élve, a hatszög csúcsai ilyen rendben következnek a körön: $AM_3BM_1CM_2A$. A tétel maga szinte nyilvánvaló, mivel

$$ABC = AMB + BMC + CMA$$

és

$$AM_3B\triangle \cong AMB\triangle, \quad BM_1C\triangle \cong BMC\triangle, \quad CM_2A\triangle \cong CMA\triangle.$$

Tehát valóban

$$(5) \quad AM_3BM_1CM_2 = 2ABC.$$

b) Ha a háromszög *tompaszögű* ($C > 90^\circ$), akkor óvatosan kell eljárunk.

Mindenekelőtt a hatszög csúcsait most is az *előbbi rendben* vesszük. Azonban, mivel M külső pont, M_2 és M_1 a BC , illetőleg CA köríven lesznek (l. a 2. rajzot). Ezért a hatszög kerülete önmagát *metszi*.

Olyan idomoknál, melyeknek kerülete önmagát metszi, a *terület* értelmezésére külön megállapodás szokásos (l. *Baltzer*: *Elemente der Mathematik* 11. 64–65. l.)

A mostani esetről elég a következő megállapítás:

Felbontjuk a hatszöget olyan idomokra, a melyek kerülete nem metszi önmagát. Az ilyen idomok területének előjelet tulajdonítunk. A területet *positív*nak vesszük, ha a kerületet az óramutató járásával *ellenkező* irányban jártuk körül, *negatív*nak az ellenkező esetben.

E szerint az $AM_3BM_1CM_2A$ hatszög területét az AM_3BD és a DM_2CM_1 részekre bontjuk. Ha a felírt sorban az egész kerületet végig járva gondoljuk, könnyű látni, hogy az AM_3BD területet pozitív, a DM_2CM_1 -et negatív jellel kell vennünk, úgy, hogy

$$(6) \quad AM_3BM_1CM_2 = AM_3BD - DM_2CM_1.$$

Más részről:

$$ABC = ABM - ACM - CBM.$$

De

$$ABM\Delta \cong ABM_3\Delta, \quad ACM\Delta \cong ACM_2\Delta, \quad CBM\Delta \cong CBM_1\Delta$$

lévén, írhatjuk:

$$ABC = ABM_3 - ACM_2 - CBM_1$$

és

$$(6') \quad 2ABC = ABM_3 + ABC - ACM_2 - CBM_1.$$

Azonban

$$ABC - ACM_2 - CBM_1 = ABD - DM_2CM_1;$$

a mit $6'$ -be írva és tekintetbe véve, az

$$AM_3B + ABD = AM_3BD,$$

egyenlőséget, azt kapjuk, hogy

$$(7) \quad 2ABC = AM_3BD - DM_2CM_1.$$

A 7) és 6)-nak egybevetése mutatja, hogy ilyen megállapítások után a tétel tompaszögű háromszögre is helyes.

Ezután geometriai úton bebizonyítható:

4. *Hegyszögű háromszög területét megkapjuk, ha a talpponti háromszög kerületét szorozzuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarának felével.* (K. M. L. IX. 26. l. 842. feladat.)

Legyen O a háromszög köré írt kör középpontja, r a sugara. Húzzuk meg az OA , OB , OC sugarakat, és kössük össze O -t sorra M_1 , M_2 , M_3 -mal is. Így az $AM_3BM_1CM_2$ hatszög területét felosztottuk három négyszögre: OM_2AM_3 , OM_3BM_1 , OM_1CM_2 . Ezek mindegyike delta négyszög, melyeknek egyik átlója a kör sugara, másik átlója az $M_1M_2M_3$ háromszögnek egyik oldala.

E szerint

$$OM_2AM_3 = \frac{1}{2}r \cdot M_2M_3, \quad OM_3BM_1 = \frac{1}{2}r \cdot M_3M_1, \quad OM_1CM_2 = \frac{1}{2}r \cdot M_1M_2;$$

a 3. tételt alkalmazva, írhatjuk:

$$2ABC = \frac{1}{2}r[M_2M_3 + M_3M_1 + M_1M_2].$$

Tekintetbe véve az $M_1M_2M_3$ és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóságát:

$$M_2M_3 = 2B_1C_1, \quad M_3M_1 = 2C_1A_1, \quad M_1M_2 = 2A_1B_1;$$

úgy hogy ezeket az előbbi kifejezésbe beírva és azután egyszerűsítve:

$$(8) \quad ABC = \frac{1}{2}r[B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1].$$

Ha a talpponti háromszög kerületét $2p_1$ -gyel jelöljük, akkor még:

$$(8') \quad ABC = r \cdot p_1.$$

5. *Tompaszögű háromszög területét megkapjuk, ha a talpponti háromszög kerületének és a háromszögön kívül fekvő oldala kétszeresének különbségét szorozzuk az eredeti háromszög köré írható kör sugarának felével.*

Az O pontot éppen úgy összekötjük a hatszög csúcsaival, mint a 4. tétel bizonyításánál. A 3. b) alattiak értelmében

$$(9) \quad 2ABC = AM_3BD - DM_2MCM_1.$$

Azonban

$$AM_3BD = AM_3OE + EOFD + FOM_3B$$

és azonosan írható

$$AM_3BD - DM_2CM_1 = (AM_3OE + EOFD + DFM_2) + \\ (FOM_3B + EOFD + EDM_1) - (EOFD + DFM_2 + EDM_1 + DM_2CM_1).$$

A zárójelbe írt területek azonban az előbbi delta négyszögeket adják, úgy hogy

$$2ABC = AM_3OM_2 + BM_1OM_3 - CM_1OM_2;$$

a négyszögek területeit úgy, mint előbb kifejezve, és a talpponti háromszögnek az $M_1M_2M_3$ háromszöghöz való viszonyát tekintetbe véve:

$$ABC = \frac{1}{2}r \cdot [B_1C_1 + C_1A_1 - A_1B_1],$$

vagy

$$(10) \quad ABC = \frac{1}{2}[B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 - 2A_1B_1].$$

Ha a talpponti háromszög kerületét újra $2p_1$ -gyel az A_1B_1 oldalt röviden c_1 -gyel jelöljük, még írható:

$$(10') \quad ABC = r(p_1 - c_1).$$

Megjegyzés. A 8') és 10') segítségével felírhatjuk a háromszög és talpponti háromszög területének viszonyát. Ha először is hegyesszögű a háromszög, és a talpponti háromszög oldalait belülről érintő kör sugara p_1 , akkor

$$A_1B_1C_1 = \rho_1 \cdot p_1$$

lévén,

$$(11) \quad ABC : A_1B_1C_1 = r : \rho_1.$$

Tompaszögű háromszögnél a 11) úgy helyes, ha ρ_1 annak az érintő körnek sugarát jelenti, a melyik a talpponti háromszögnek az eredeti háromszögn kívül fekvő oldalát kívülről érinti.¹

Derékszögű háromszögnél a 8) és 10) képletek átmennek a terület közös kéifejezésébe. A 11) pedig elveszti értelmét.

Említésre méltónak tartom, hogy az 1) tétel haszonnal alkalmazható a *Simson*-egyenesre vonatkozó tételek bebizonyításánál is.

¹ A 4) – 5) alattiakra nézve v. ö. *Baltzer* Elemente der Mathematik II. 309–310. l., a hol a hegyes- és tompaszögű háromszög közötti különbség nincs elég élesen kiemelve.