

Valamely polynom n -dik hatványa könnyen meghatározható, ha ismerjük a binomiális tételt. Ugyanis:

$$(a+x)^2 = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{\alpha}a^\alpha x^{n-\alpha} + \dots + \binom{n}{n}a^n = \Sigma \binom{n}{\alpha}a^\alpha x^{n-\alpha},$$

vagy még:

$$(a+x)^n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!} a^\alpha x^{n-\alpha}.$$

Ha most x helyébe $(b+c)$ -t teszünk és tekintetbe vesszük, hogy

$$x^{n-\alpha} = (b+c)^{n-\alpha} = \Sigma \frac{(n-\alpha)!}{\beta![(n-\alpha)-\beta]!} b^\beta c^{(n-\alpha)-\beta},$$

akkor

$$(a+b+c)^n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!(n-\alpha-\beta)!} a^\alpha b^\beta c^{(n-\alpha)-\beta}.$$

Tegyük fel, hogy az itt talált törvényszerűség p tag esetén igaz, tehát hogy

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{p-1} + x)^n &= \\ &= \Sigma \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_{p-1}![n-a_1-a_2-\dots-a_{p-1}]!} \cdot a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots x^{n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{p-1}} \end{aligned}$$

és tegyük x helyébe $(a_p + a_{p+1})$ -et; akkor tekintetbe véve, hogy

$$\begin{aligned} x^{n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p-1})} &= (a_p + a_{p+1})^{n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p-1})} = \\ &= \Sigma \frac{[n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p-1})]!}{a_p![n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{p-1}+a_p)]!} a_p^{\alpha_p} a_{p+1}^{n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_p} \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p + a_{p+1})^n &= \\ &= \Sigma \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_p![n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p)]!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p} a_{p+1}^{n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_p}. \end{aligned}$$

Ha tehát a tétel p összeadandó esetén érvényes, akkor igaz $p+1$ esetén is. Ámde $p=2$ esetén igaz volt, helyes tehát akkor is, ha $p=3$, $p=4$ és í. t. s így helyes minden esetben.

Általában tehát:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n &= \\ &= \Sigma \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_{p-1}![n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{p-1}]]} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{p-1}^{\alpha_{p-1}} a_p^{n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{p-1}} \end{aligned}$$

ha pedig

$$n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{p-1} = a_p$$

teszünk; akkor a polynomiális képlet végső alakja:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n = \Sigma \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_p!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p},$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_p$ pozitív egész számok, vagy 0 és

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = n.$$

Legyen pl. kifejtendő $(a+b+c)^4$, akkor:

$$(a+b+c)^4 = \Sigma \frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \quad \text{és} \quad \alpha + \beta + \gamma = 4.$$

α, β, γ értékei	Az egyes tagokban a főmennyiségek	Együtthatóik
4, 0, 0	$a^4b^0c^0, a^0b^4c^0, a^0b^0c^4.$	$\frac{4!}{4!0!0!} = 1$
3, 1, 0	$a^3b^1c^0, a^3b^0c^1, b^3c^0a^1, c^3a^1c^0, c^3a^0b^1.$	$\frac{4!}{3!1!0!} = 4$
2, 2, 0	$a^2b^2c^0, a^2b^0c^2, a^0b^2c^2.$	$\frac{4!}{2!2!0!} = 6$
2, 1, 1	$a^2b^1c^1, a^1b^2c^1, a^1b^1c^2.$	$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$

és így

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + \\ &+ 4a^3b + 4a^3c + 4b^3c + 4b^3a + 4c^3a + 4c^3b + \\ &+ 6a^2b^2 + 6b^2c^2 + 6c^2a^2 + \\ &+ 12a^2bc + 12b^2ca + 12c^2ab.\end{aligned}$$

Végül könnyen meghatározhatjuk még a $K = (a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$ kifejtésében a tagok számát is. Ugyanis minden tagnak

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p} = a_1 a_1 \dots a_1^{\alpha_1} a_2 \dots a_2^{\alpha_2} \dots a_p \dots a_p^{\alpha_p}$$

alakja van, a hol

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n.$$

Annyi tagja van tehát a K -nak, a hány ismétléssel alkotható n -ed osztályú kombinációja van p elemnek; vagyis:

$$C_n^i(p) = C_n(n+p-1) = C_{p-1}(n+p-1),$$

mert

$$\binom{n+p-1}{n} = \binom{n+p-1}{p-1}.$$

Tehát

$$C_n^i(p) = C_n(n+p-1) = \frac{(n+p-1)(n+p-2) \dots p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

vagy

$$C_n^i(p) = C_{p-1}(n+p-1) = \frac{(n+p-1)(n+p-2) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)}.$$

A számolásnál az előbbi vagy utóbbit használjuk, a mint $n \leq p$.

A kidolgozott feladatnál, minthogy $4 > 3$, az utóbbi formulát használjuk:

$$C_4^i(3) = C_2(6) = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

A polynomiális tétel segélyével igen egyszerű bizonyítását adhatjuk *Euler* tételének, a melynek a *Fermat*-féle tétel egyszerűbb esete. Ha ugyanis:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1,$$

akkor

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n = p^n.$$

A jobb oldalon vannak olyan tagok $(a_1^n, a_2^n, \dots, a_p^n)$, a melyekben a tényezők hatványkitevői: $n, 0, 0, \dots, 0$, tehát együtthatóik:

$$\frac{n!}{n!0!0! \dots 0!} = 1.$$

Ezen tagok összege

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n = 1 + 1 + \dots + 1 = p.$$

Lesz tehát

$$p^n - p = \sum \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_p!}, \text{ hol } a_1 + a_2 + \dots + a_p = n.$$

E kifejezésben azonban most már $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ hatványkitevők mindegyike n -nél kisebb pozitív egész szám vagy nulla, mert ha csak egy is n -nel egyenlő, akkor a többi 0 és ezeket a tagokat a baloldalra vittük. Ámde $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_p!}$ az n elemből ismétléssel alkotott *permutációk számát* jelenti, ha az elemek közt $a_1, a_2, \dots, a_p$ egyenlő van, tehát minden $A = \frac{n!}{a_1! \dots a_p!}$ egész szám. Ha tehát n abszolút prímszám, akkor a nevezőben levő tényezők mind kisebbek

lévén n -nél, ez az egyszerűsítésnél nem eshetik ki, tehát minden A és így az egész $\sum \frac{n!}{a_1! \dots a_p!}$ és evvel együtt $p^n - p$ is osztható n -nel.

Tehát:

Euler tétele: "A $p^n - p$ különbség osztható n -nel, ha n abszolút prímszám".

Euler tételének közvetlen folyománya *Fermat* tétele. Ugyanis, ha n abszolút prímszám, akkor

$$p^n - p = n \cdot N = p(p^{n-1} - 1)$$

vagy

$$\frac{p(p^{n-1} - 1)}{n} = N,$$

a hol N egész szám. Ha már most p és n relatív prímszámok, akkor kell, hogy $(p^{n-1} - 1)$ osztható legyen n -nel, vagyis:

Fermat tétele: "Ha n abszolút prímszám nem osztója a p -nek, akkor $(p^{n-1} - 1)$ osztható n -nel"