

(Ismétléssel.)

Ha megengedjük, hogy a variáció- és kombináció- csoportok elemei között ugyanazon elem többször is előforduljon, akkor ismétléssel alkotott variáció – illetőleg kombináció – csoportokról beszélhetünk, melyeknek számát $V_r^i(n)$, illetőleg $C_r^i(n)$ jelöljük. Ha pedig az adott elemek között egyenlők is vannak, azaz a pl. α -szor, b pl. β -szor stb. fordul elő, akkor ezen elemek permutációit meg kell különböztetnünk azoktól, melyekben egyenlő elemek nem fordulhatnak elő. Az ilyen permutációk számát $P_n(a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \dots l^\lambda)$ -val jelöljük, a hol $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ 1-gyel is lehetnek egyenlők és azt mutatják, hogy az egyes elemek hányszor fordulnak elő minden csoportban. Így tehát

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = n.$$

Célunk első sorban a $V_r^i(n)$ -et kiszámítani. Képzeljük e végből, hogy az összes n elemből ismétléssel alkotott $(r-1)$ -ed osztályú variáció-csoportokat felírtuk. Minthogy ugyanazon elem többször is előfordulhat, azért minden $(r-1)$ -ed osztályú csoporthoz most n új elemet fűzhetünk, vagyis:

$$V_r^i(n) = n \cdot V_{r-1}^i(n),$$

épp így

$$V_{r-1}^i(n) = n \cdot V_{r-2}^i(n),$$

...

$$V_2^i(n) = n \cdot V_1^i(n)$$

$$V_1^i(n) = V_1(n) = n.$$

Eme egyenleteket egymással megszorozva, nyerjük, hogy:

$$V_r^i(n) = n^r.$$

Vagyis az n elemből ismétléssel alkotott r -ed osztályú variáció-csoportok számát nyerjük, ha n -et az r -edik hatványra emeljük.

Hogy a $C_r^i(n)$ -et kiszámíthassuk, következőképpen járunk el. Képzeljük, hogy az n elemből, ismétléssel alkotott összes r -ed osztályú kombináció-csoportokat felírtuk; akkor, minthogy minden csoportban r elem van, az összes felírt elemek száma $r \cdot C_r^i(n)$, vagyis minden egyes elem (pl. x) $\frac{r}{n} \cdot C_r^i(n)$ -szer fordul elő. Ezen (x) elemek számát másként is előállíthatjuk. Ha ugyanis kiválasztjuk mindazon csoportokat, a melyek x -et tartalmazzák és mindegyikből az x -et egyszer elhagyjuk, akkor visszamaradnak az adott n elemből, ismétléssel alkotott összes $(r-1)$ osztályú kombináció-csoportok, Ezúttal, tehát $C_{r-1}^i(n)$ elemet hagytunk el és minthogy a $C_{r-1}^i(n)$ kombináció-csoportban x még $\frac{r-1}{n} C_{r-1}^i(n)$ -szer előfordul, azért

$$\frac{r}{n} C_r^i(n) = C_{r-1}^i(n) + \frac{r-1}{n} C_{r-1}^i(n),$$

miből

$$r \cdot C_r^i(n) = (n+r-1) C_{r-1}^i(n),$$

épp így

$$(r-1) C_{r-1}^i(n) = (n+r-2) C_{r-2}^i(n),$$

...

$$2 C_2^i(n) = (n+1) C_1^i(n),$$

$$C_1^i(n) = C_1(n) = n.$$

Eme egyenleteket egymással megszorozva nyerjük, hogy:

$$C_r^i(n) = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\dots(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r} = \binom{n+r-1}{r} = C_r(n+r-1).$$

Vagyis az n elemből, ismétléssel alkotott r -ed osztályú kombinációk száma akkora, mint az $(n+r-1)$ elemből, ismétlés nélkül alkotott r -ed osztályú kombinációk száma.

Ezek alapján könnyen kimutatható, hogy

$$C_r^i(n) = C_{r-1}^i(n) + C_r^i(n-1).$$

Ha ez utolsó képlet érvényességét minden esetben fenn akarjuk tartani, akkor a

$$C_1^i(n) = C_0^i(n) + C_1^i(n-1)$$

egyenletből

$$C_0^i(n) = 1$$

Végül még ama permutációk számát kell kiszámítanunk, melyekben az elemek ismétlődnek. Legyen az n adott :

$$aa \dots abb \dots b \dots l \cdot l \dots l,$$

mely csoportban az $a, b, \dots, l$ elemek rendre $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ -szor forduljanak elő, miért is

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = n.$$

Hogy a csoportok számát meghatározhassuk, adjunk az egyenlő elemeknek indexeket és tegyük fel, hogy az így felírt elemek mind különbözők:

$$a_1 a_2 \dots a_\alpha b_1 b_2 \dots b_\beta c_1 c_2 \dots c_\gamma \dots l_1 l_2 \dots l_\lambda.$$

Eme most különbözőnek vett n elem permutációinak száma $P(n)$. A $P(\alpha)$ csoportokban egymás mellett megmaradnak az a -k, $P(\beta)$ -ban a b -k és í. t' $P(\lambda)$ -ban az l -ek. Ha tehát az $a - k, b - k, \dots l$ -ek identikus elemek lesznek, akkor a különböző permutációk száma $P(\alpha)$ -szor, $P(\beta)$ -szor, $\dots P(\lambda)$ -szor kisebb lesz; vagyis:

$$P_n = (a^\alpha, b^\beta, \dots l^\lambda) = \frac{P(n)}{P(\alpha) \cdot P(\beta) \dots P(\lambda)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!}.$$