

Adva van n különböző elem, melyeket rendre $1, 2, 3, \dots (n-1), n$ -nel vagy az abc betűvel jelölünk.

Ha kiválasztunk $k (k \leq n)$ elemet és ezeket egymás mellé írjuk, akkor az n adott elem egy k -ad osztályú csoportját kapjuk. Ha az egyes csoportokat nemcsak a bennük előforduló elemek, hanem azok elhelyezése szerint is megkülönböztetjük, akkor a csoport az n adott elem k -ad osztályú variációját képezi, melyet $k = n$ esetében permutáció-csoportnak nevezünk.

$$\begin{array}{cccc} 12, & 13, & 14, & \dots \\ 21, & 23, & 24, & \dots \end{array}$$

tehát különböző variáció-csoportok.

Ha ellenben az elemek sorrendjére tekintettel nem vagyunk, akkor a kérdéses csoport az n adott elem k -ad osztályú kombinációja.

$$123, 132, 213, 231, 312, 321,$$

tehát identikus kombináció-csoportok, mert ugyanazon elemeket -különböző sorrendben is- tartalmazzák.

Jelöljük az n adott elemből alakítható k -ad osztályú variációk számát $V_k(n)$ -nel, a k -ad osztályú kombinációk számát $C_k(n)$ -nel és az n elemből alakítható permutációk számát $P(n)$ -nel. A következőkben célunk oda irányul, hogy ezeket kiszámíthassuk.

Az n adott elemből alakítható 1-ső osztályú variációk: $1, 2, 3, \dots, n$, vagyis

$$V_1 = n.$$

A másodosztályú variációkat az első osztályúból alakíthatjuk; általában a k -ad osztályút a $(k-1)$ -ed osztályúból, még pedig a következőképpen.

Képzeliük el, hogy az n elemből alakítható $(k-1)$ -ed osztályú variációk már mind fel vannak írva és jelöljük ezen variációk egyikét x -szel, akkor még $n - (k-1) = n - k + 1$ oly elem van, a melyet az x nem tartalmaz. Ha ezen $n - k + 1$ elem bármelyikét x -hez függesztjük, akkor csupa k -ad osztályú csoportot kapunk. Ily módon x -ből $n - k + 1$, tehát $V_{k-1}(n)$ -ből új csoportot kapunk.

Már most kimutathatjuk, hogy az $(n - k + 1)V_{k-1}(n)$ csoport mind különbözik egymástól. Ha ugyanis két k -ad osztályú csoportot ugyanazon x -ből képeztünk, akkor az utolsó elemben különböznek, ha pedig különböző $(k-1)$ -ed osztályú variációból alakítottuk őket, akkor eo ipso különböznek egymástól.

Másodszor kimutatjuk, hogy az összes k -ad osztályú variációt felírtuk ily módon. Ha ugyanis y egy tetszőszerinti k -ad osztályú variáció, akkor utolsó elemét elhagyva egy $(k-1)$ -ed osztályú variációt kapunk, a mely a $V_{k-1}(n)$ -ben minden esetre előfordul; legyen ez pl. a . Ámde a -hoz az összes benne elő nem forduló $n - k + 1$ elemet hozzákapcsoltuk, tehát y -t csakugyan képeztük. Tehát

$$(1) \quad V_k(n) = (n - k + 1) \cdot V_{k-1}(n)$$

éppígy

$$V_{k-1}(n) = (n - k + 2) \cdot V_{k-2}(n)$$

...

$$V_3(n) = (n - 2) \cdot V_2(n)$$

$$V_2(n) = (n - 1) \cdot V_1(n)$$

$$V_1(n) = n.$$

Ezen egyenleteket összeszorozva, kapjuk, hogy

$$(2) \quad V_k(n) = (n - k + 1)(n - k + 2) \dots (n - 1)n$$

Az n elemből alakítható k -ad osztályú variációk számát tehát az n -től $(n - k + 1)$ -ig terjedő egész számok szorzata adja.

Míthogy

$$P(n) = V_n(n),$$

azért

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

a mit még így is szoktunk írni:

$$(3) \quad P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

Az n elemből alakítható permutációk számát tehát megkapjuk, ha a természetes számsor számait 1-től n -ig egymással megszorozzuk.

Végül számítsuk ki $C_k(n)$ -et.

Képzeljük el e végből, hogy az összes k -ad osztályú kombinációkat felírtuk; akkor minden egyes kombináció-csoportból az elemek permutálása által más és más, vagyis összesen $P(k)$ variációt nyerünk. Ezen variációk között nincsenek identikusak. Ha ugyanis x és y két tetszőleges variáció, akkor ezek vagy egy és ugyanazon kombináció-csoport permutációjából keletkeztek és ekkor az elemek nem lehetnek ugyanazon sorrendben, tehát a csoportok különbözők; vagy különböző kombináció-csoportokból származtak, s ekkor különböző elemeket is tartalmaznak, tehát szintén különbözők.

Másodszor ilyen módon minden képzelhető variáció-csoportot előállítottunk, a mi nem is szorul bizonyításra.

Fennáll tehát ama összefüggés, hogy:

$$(4) \quad V_k(n) = C_k(n) \cdot P(k),$$

miből

$$(5) \quad C_k(n) = \frac{V_k(n)}{P(k)} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \binom{n}{k}.$$

Az n elemből alkotható k -ad osztályú kombinációk száma oly tört alakjában írható fel, melynek számlálója k darab n -től lefelé menő egymásután következő szám szorzatából, nevezője pedig ugyancsak k darab 1-től felfelé menő szám szorzatából áll.

A $C_k(n)$ -et más alakban is előállíthatjuk, ha az (5) számlálóját és nevezőjét $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k) = (n-k)!$ -sal szorozzuk.

$$(6) \quad C_k(n) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ámde éppígy

$$C_{n-k}(n) = \frac{n!}{(n-k)k!}$$

s így

$$(7) \quad C_k(n) = C_{n-k}(n) \text{ vagy } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Azt is könnyen kimulathatjuk; hogy:

$$(8) \quad C_k(n) + C_{k-1}(n) = C_k(n+1).$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} C_k(n) + C_{k-1}(n) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right] = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_k(n+1). \end{aligned}$$

Tehát

$$(9) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Az eddigiek szerint $C_0(n) = \binom{n}{0}$ -nek nincs értelme. Ha azonban a (7) érvényességét minden esetben fenn akarjuk tartani, akkor $\binom{n}{0}$ -t úgy értelmezzük, hogy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

A $V_0(n)$ -t úgy értelmezzük, hogy (1) a $k=0$ esetében is érvényes legyen, vagyis hogy:

$$V_1(n) = nV_0(n) = n,$$

miért is tehát akkor

$$V_0(n) = 1.$$

Ha pedig a (3) érvényességét is biztosítani akarjuk a $k=0$ esetére is, akkor:

$$V_0(n) = C_0(n) \cdot P(0),$$

miből

$$P(0) = \frac{V_0(n)}{C_0(n)} = 1,$$

tehát

$$0! = 1.$$