

A következőkben a komplex számokkal végezhető műveleteket fogjuk áttekinteni, ha azok trigonometrikus alakban vannak megadva.

I.

$$\begin{aligned} & r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ & = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Ha

$$(1) \quad R \cos \varphi = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2$$

és

$$(2) \quad R \sin \varphi = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2$$

akkor osztással nyerjük, hogy

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2},$$

ha pedig mindkét egyenletet négyzetre emelés után összeadjuk, akkor:

$$(4) \quad R^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

A (3) és (4)-ből látható, hogy csakugyan lehetséges olyan φ -t és R -et meghatározni, melyek (1)-et és (2)-öt kielégítik. Írhatjuk tehát, hogy minden esetben:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Vagyis itt is kitűnik, hogy két komplex szám összege ismét komplex számot ad. Ugyan e tétel érvényes a komplex számok kivonására is, mely esetben ugyanúgy járunk el, mint előbb.

II.

$$\begin{aligned} & [r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ & = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

jobban általánosítva:

$$\begin{aligned} & [r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)][r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] \dots [r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)] = \\ & = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots \varphi_n)] \end{aligned}$$

Tehát két, vagy több komplex szám szorzata ismét komplex számot ad, melynek modulusa a tényezők modulusainak szorzatával, argumentuma pedig a tényezők argumentumainak összegével egyenlő.

III.

$$\begin{aligned} \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Két komplex szám hányadosa tehát oly komplex számot ad, melynek modulusa az osztandó és osztó modulusának hányadosa, argumentuma pedig az osztandó és osztó argumentumainak különbsége.

IV.

$$\begin{aligned} & [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] \cdot [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] \dots r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ (1) \quad & = r \cdot r \cdot r \dots r [\cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)] = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Valamely komplex szám n -ik hatványa oly komplex szám, melynek modulusa az alap modulusának n -ik hatványa, argumentuma pedig az alap argumentumának n -szerese.

E tétel azonban akkor is érvényes, ha a hatványkitevő negatív egész szám, vagy tört. Ugyanis:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}.$$

Az osztást végrehajtva *III.* szerint nyerjük, hogy

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} = r^{-n}[(\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi))].$$

Ha pedig a hatványkitevő törtszám, akkor:

$$(2) \quad [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

A felírt egyenlőség helyességéről rögtön meggyőződünk, ha mindkét oldalt felemeljük az n -ik hatványra, mert akkor a következő identitáshoz jutunk:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ez utóbb nyert egyenlet még a következőképp is írható:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

Míthogy pedig:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi) \\ \sin \varphi = \sin(\varphi + 2k\pi) \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tehát

$$(3) \quad \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Tehát: Valamely komplex szám n -ik gyökének modulusa a radicandus modulusának pozitív n -ik gyöke, argumentuma pedig a radicandus argumentumának n -ed része.

A (3)-ban k felvehet minden egész számú értéket. Azt lehetne tehát gondolni, hogy valamely számnak végtelen sok különböző gyöke van. A következőkben megmutatjuk, hogy:

Valamely komplex szám n -ik gyökének n egymástól független gyöke van.

Ugyanis:

$$\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\varphi - 2k\pi}{n}$$

és

$$\sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{\varphi - 2k\pi}{n},$$

miből folyik, hogy elégséges, ha k -nak pozitív $(0, 1, 2, \dots)$ értékeket adunk. Ha $k = n$, akkor

$$\cos \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) = \cos \frac{\varphi}{n}$$

és

$$\sin \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) = \sin \frac{\varphi}{n}$$

vagyis ugyanazt a gyököt kapjuk, mint $k = 0$ esetben. Legyen

$$\frac{k}{n} > 1,$$

akkor

$$\frac{k}{n} = q + \frac{r}{n},$$

a hol már tehát

$$\frac{r}{n} < 1, \quad \text{tehát} \quad r < n.$$

Ebben az esetben

$$\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2q\pi \right) = \cos \frac{\varphi + 2r\pi}{n}$$

és

$$\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left(\frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi \right) = \sin \frac{\varphi + 2r\pi}{n}.$$

Független gyököket tehát csak akkor kapunk, ha $k < n$, ha tehát $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, miből következik kimondott tételünk helyessége.

A *IV.* alatti képleteket *Moirre*-féle képleteknek nevezzük.