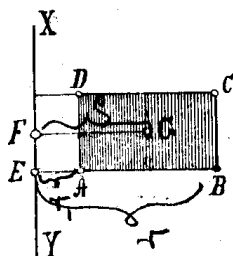


A Guldin-féle szabály. Stereometriai feladatok megoldásánál gyakran hivatkozunk a Guldin-féle szabályra, miért is e szabályt s bizonyítását bemutatjuk. E végből kiszámítjuk ama forgási test köbtartalmát, mely az $ABCD$ téglalapnak az XY tengely körül való forgásából keletkezik.



Ha $AD = m$, $EA = r_1$, $EB = r$, $FG = \rho$, akkor, minthogy AD és BC hengerfelületet írnak le, a köbtartalom

$$V = (r^2 - r_1^2)\pi m = (r + r_1)(r - r_1)\pi m = \\ = 2 \frac{r + r_1}{2} \pi \cdot AB \cdot m = 2\rho\pi t,$$

ha t a téglalap területe.

Látjuk tehát, hogy a forgási test köbtartalmát megkapjuk, ha a súlypont által leírt utat megszorozzuk a forgó idom területével.

Ha a forgó idom több téglalapról tehető össze, melyeknek területei $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$, a megfelelő súlypontok távolsága XY -től pedig $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \dots$, akkor

$$v = 2\rho_1\pi t_1 + 2\rho_2\pi t_2 + 3\rho_3\pi t_3 + \dots$$

vagy

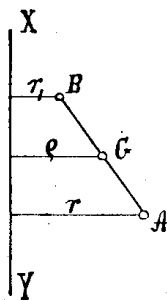
$$v = 2\pi(\rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_3 t_3 + \dots)$$

De minthogy a zárójelben levő nyomatékok összege ρt , hol t az egész idom területe, ρ pedig a súlypontjának távolsága XY -től, azért ismét:

$$v = 2\rho\pi t.$$

A tétel minden síkidomra alkalmazható, mert minden síkidom tetszősszerű pontossággal szétbontható csupa apró téglalapról.

E szabály a forgási testek *fölületének* meghatározására is szolgál.



Ha pl. AB egyenes forog XY tengely körül, akkor a keletkező kúpfélület területe:

$$F = (r + r_1)\pi \cdot AB = 2 \frac{r + r_1}{2} \pi \cdot AB = 2\rho\pi \cdot AB.$$

Látjuk tehát, hogy a súlypont útját meg kell szoroznunk a forgó egyenes hosszúságával.

A tétel könnyen bizonyítható akkor is, ha egy tetszősszerű vonal forog. (L. Holzmüller: Elementar-Mathematik.)

E szabályt már Pappus is ismerte; behatóbban foglalkozott vele Guldin Habakuk Pál (1577-1643) *De centro gravitatis* című munkájában.

E szabályt alkalmazva, könnyen oldhatjuk meg a következő feladatot:

833. Adva van az általános trapéz két párhuzamos oldala a és b , továbbá a magassága m . Meghatározandó a trapéz súlypontjának a távolsága az egyik párhuzamos oldaltól.

Ebben az esetben

$$V = \frac{a + b}{2} m \cdot 2d\pi,$$

ha d a súlypont távolsága b -től. De ha a trapéz b körül forog ($b > a$), akkor:

$$V = am^2\pi + \frac{b-a}{3}m^2\pi - m^2\pi\frac{b+2a}{3}$$

s így

$$\frac{a+b}{2}m \cdot 2d\pi = m^2\pi\frac{b+2a}{3},$$

miből

$$d = \frac{m(b+2a)}{3(a+b)}$$

(Lázár Lajos, Budapest.)

A feladatot még megoldották: Bayer B., Bogdán G., König D., Lukhaub Gy., Póka Gy., Scharff J., Sasvári J.

$\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$. Megmutatjuk, hogy hogyan számíthatók ki a $\cos 18^\circ$ szög függvényei, a megfelelő szabályos sokszög oldalhosszána ismerete nélkül.

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ$$

$$\cos 18^\circ = 4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ,$$

tehát

$$(1) \quad 4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1.$$

Minthogy pedig

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

azért

$$(2) \quad \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$$

legyen most $2 \sin 18^\circ = x$, $2 \cos 36^\circ = y$, akkor (1) és (2)-ből:

$$xy = 1$$

$$y + x^2 = 2,$$

mely egyenletekből

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

vagy

$$x(x^2 - 1) - (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)[x(x + 1) - 1] = 0,$$

miből

$$x^2 + x - 1 = 0$$

s így

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Tehát

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \quad \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}.$$