

A számtani sorok összegének meghatározására a következő módszer is alkalmas.

4°. Az elsőrendű számtani sor összege.

$$S = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d].$$

E sor összege ily alakban fejezhető ki:

$$(1) \quad S = An^2 + Bn + C.$$

De $C = 0$, mert ha $n = 0$, akkor $S = 0$. Meg kell tehát még határoznunk A -t és B -t.

Ha $n = 1$, akkor

$$A + B = a_1$$

ha $n = 2$, akkor

$$4A + 2B = 2a_1 + d.$$

E két egyenletből:

$$A = \frac{d}{2}, \quad B = \frac{2a_1 - d}{2}.$$

A , B és C értékeit (1)-be téve, ered:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

5°. Minden másodrendű számtani sor összege:

$$(2) \quad S = An^3 + Bn^2 + Cn,$$

Ilyen sor például:

$$S = 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + \dots$$

Ha (2)-ben n helyébe 1-et, 2-t, 3-at teszünk, akkor ered:

$$A + B + C = 1$$

$$8A + 4B + 2C = 6$$

$$27A + 9B + 3C = 18.$$

Eme egyenletekből

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = 0$$

s így

$$S = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

E módszerrel a számok négyzeteinek összegét így számítjuk ki:

$$S = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2.$$

A megoldandó egyenletek ez esetben:

$$A + B + C = 1$$

$$8A + 4B + 2C = 5$$

$$27A + 9B + 3C = 14.$$

Eme egyenletekből

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{6}$$

s így

$$S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6°. A természetes számok harmadik hatványai harmadrendű sort alkotnak.

$$S = 1 + 8 + 27 + 64 + \dots + n^3.$$

Ez esetben

$$S = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$A + B + C + D = 1$$

$$16A + 8B + 4C + 2D = 9$$

$$81A + 27B + 9C + 3D = 36$$

$$256A + 64B + 16C + 4D = 100.$$

Eme egyenletekből

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = 0$$

s így

$$S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$