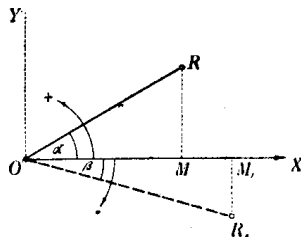


I. Coordinata rendszerek a síkban.

C) Sarkcoordináták.

Ha a síkban valamely O szilárd pontot választunk, és az O pontból úgynevezett OX félsugarat húzunk, akkor a sík R pontjának a helyzetét tudjuk, ha egyrészt az R pontnak O ponttól való ρ távolságát, másrészt pedig a szöget ismerjük, melyet az $OR = \rho$ távolság az OX félsugárral alkot. (16. ábra.)



16. ábra

az OX félsugarat *sarktengetelynek*, az O pontot *sarknak*; az $OR = \rho$ távolságát *radius vectornak* és az α szöget *sarkszögnek* nevezzük. A radiusvector és a sarkszög alkotják a pont *sarkcoordinátáit*.

A radius vectort csak abszolút értékében szoktuk számításba venni; a sarkszöget azonban, a sarktengetelytől számítva az óramutató járásával ellenkező irányban pozitívnak, vele megegyező irányban pedig negatívnak vesszük.

(Az ábrában látható R pontnak sarkszöge $+$; az R_1 ponté $-$).

Az R pont sarkcoordinátáiból könnyű szerrel megtalálhatjuk ugyanannak a pontnak a Cartesius-féle derékszögű koordinátáit és viszont. Ha ugyanis a sarkrendszert olyan derékszögű rendszerrel hozzuk kapcsolatba, melynek kezdőpontját az O sarkpontban választjuk és melynek abszcissa tengelye a sarktengetelyt födi, akkor az $ROM\Delta$ -ból

$$\frac{RM}{OR} = \sin \alpha \quad \text{és} \quad \frac{OM}{OR} = \cos \alpha;$$

vagynis

$$y = \rho \sin \alpha \quad \text{és} \quad x = \rho \cos \alpha, \quad \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ezen kapcsolatok alapján szoktuk az egyenleteket transformálni.

D) Homogén coordináták.

Parallel coordinátákra vonatkozó egyenleteken gyakran láthatjuk, hogy ha egyes tagjaiban a bennök előforduló változóknak (ismeretleneknek) hatványkitevőit összeadjuk, az összeg nem minden egyes tagban egyenlő.

Sőt azokban az egyenletekben olyan tagokat (v. tagot) is lelünk, melyek a változókat éppenséggel nem tartalmazzák (más szóval, melyekben a változók az 0-adik hatványban fordulnak elő.)

Parallel coordinátákban tehát az egyenlet egyes tagjai rendszerint különböző méretűek. Az egyenletek *heterogén* jellegűek. (Ilyen pl. az $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - \rho^2 = 0$; benne az első és a második tag kétméretű, a harmadik egyméretű, a negyedik és az ötödik abszolút tagok.)

Homogén coordinátákban az egyenletek más szerkezetűek. Az *egyenletek homogének*. Homogénnek azt az egyenletet nevezzük, melynek minden egyes tagjában a változók hatványkitevőinek összege egyenlő. Homogén egyenletnek nincsen abszolút tagja. Homogén pl. $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$ egyenlet. Benne minden egyes tag kétméretű.

A homogén coordinátáknak ez nagy előnyt biztosít, mert a homogén egyenletek általánosabb jellegű tételek levezetésére alkalmasabbak.

Az a körülmény, hogy bármely nem homogén egyenletet egyszerű transzformációk alapján homogénné lehet tenni, tájékoztatást nyújt egyrészt a parallel és a homogén coordináták közti összefüggésről, másrészt megjelöli az utat, melyen haladnunk kell, ha egyik rendszerről a másikra át akarunk térni. A tudósok kimutatták, hogy a két rendszer között lévő kapcsolat annyira szoros, hogy a parallel coordináták a homogéneknek tulajdonképpen csak speciális esetét képezik.

*

A homogén coordinátákban is megkülönböztetünk *pont- és vonalcoordinátákat*.

Homogén pontcoordináták és homogén vonalcoordináták között ugyanaz a különbség, de ugyanaz az összefüggés is van, mint a közönséges pont- és vonalcoordináták között.

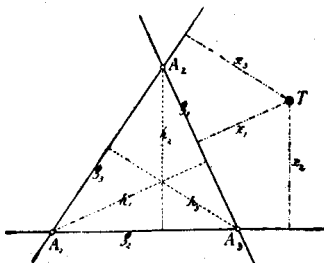
A szoros kapcsolat az elemek dualitása.

A rendszerek tényleges bemutatása előtt most mindenek előtt pillantást kellene vetni az eszmék ama egyszerű de szép és érdekes menetére, mely a homogén coordináták fölépítésére vezetett. Mind a mellett mellőzhetem a jelen

esetben a részletesebb bevezető magyarázatokat, mert *Arany Dániel* ugyan e helyen (a III. évf. 3. és 4. számában) "*a hely meghatározásról a síkban*" cz. a. közölt két cikkében a homogén koordináta rendszerek lényegét ismertette. Midőn tehát ama két cikkre való hivatkozással csak a rendszerek bemutatására szorítkozom, fölhívom a tárgy iránt érdeklődők figyelmét dr. *W. Fiedler* "*Die darstellende Geometrie*" című jeles munkájának III. kötetére. "*Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage*". E jeles mű a homogén (projectiv) koordináta rendszerek származtatásának egész menetéről minden tekintetben alapos útbaigazítást ad.

1. A pont homogén koordinátái. (Homogén pontkoordináták.)

Ha a síkban valamely $A_1A_2A_3$ szilárd koordináta háromszöget választunk, akkor a sík összes pontjait a háromszög három oldalához viszonyíthatjuk. (17. ábra.)



17. ábra

A pont koordinátái alatt ugyanis a pontnak a háromszög oldalaitól mért merőleges távolságait értjük.

Az A_2A_3 , A_3A_1 és A_1A_2 oldalak a rendszer tengelyei.

Jelöljük a T pontnak a tengelyektől való távolságait rendre x_1 -gyel, x_2 -vel és x_3 -mal; akkor x_1x_2 és x_3 értékeket a *pont trimetrikus (homogén) koordinátáinak* nevezzük.

Ha a háromszög oldalait a csúcsokon túl meghosszabbítjuk, a három egyenes (tengely) az egész síkot *hét* részre osztja. Ha a T pont nem pontja a tengelyeknek, akkor bizonyára a hét síkrész egyikében fekszik. Erre való tekintettel nem elegendő, ha a három koordinátának csak abszolút értékét ismerjük, hanem a pont teljes meghatározásának céljából a koordinátákat előjellel látjuk el.

Nevezetesen:

ha a T pont és az A_1 csúcs az A_2A_3 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_1 pozitív,

ha a T pont és az A_2 csúcs az A_3A_1 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_2 pozitív,

ha a T pont és az A_3 csúcs az A_1A_2 tengely ugyanazon oldalán van, akkor x_3 pozitív.

Ellenkező esetben a koordináták negatív előjelűek.

(A 17. ábrában x_2 és x_3 pozitív, ellenben x_1 negatív. Ha a T pont a koordináta háromszögön belül fekédnék, akkor mind a három koordinátája pozitív volna.)

Ha a háromszög oldalait g_1 -gyel, g_2 -vel, g_3 -mal; nemkülönben a háromszög *kétszeres* területét Δ -val jelöljük, akkor a koordináták közti összefüggést a $g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3 = \Delta$ egyenlet fejezi ki.

(Ennek az egyenletnek a helyességéről könnyű szerrel meggyőződhetünk. Lásd a 17. ábrát.)

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög három csúcsának a koordinátáit h_1 -gyel, h_2 -vel és h_3 -mal jelöljük, nemkülönben figyelembe vesszük, hogy $g_1h_1 = \Delta$; $g_2h_2 = \Delta$, $g_3h_3 = \Delta$ vagyis

$$\frac{g_1}{\Delta} = \frac{1}{h_1}; \quad \frac{g_2}{\Delta} = \frac{1}{h_2}; \quad \frac{g_3}{\Delta} = \frac{1}{h_3},$$

akkor a fenti egyenletet így írhatjuk :

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Ezért bátran mondhatjuk, hogy az x_1 , x_2 és x_3 számokat csak akkor tekinthetjük a T pont homogén koordinátáinak, ha az

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$$

lineáris egyenletnek eleget tesznek.

Az ábra szemléléséből közvetlenül meggyőződhetünk, hogy a háromszög három csúcsának a koordinátái a következők

Az	A_1	csúcsé:	$x_1 = h_1$;	$x_2 = 0$;	$x_3 = 0$,
	"	A_2	"	$x_1 = 0$;	$x_2 = h_2$;
		A_3	"	$x_1 = 0$;	$x_2 = 0$;
				$x_3 = h_3$.	

A koordináták értékei szempontjából érdekesek a háromszög úgynevezett "főpontjai". Azok közül a háromszögbe írható (ρ sugarú) kör középpontjának koordinátái:

$$x_1 = \rho_1; \quad x_2 = \rho_2; \quad x_3 = \rho_3.$$

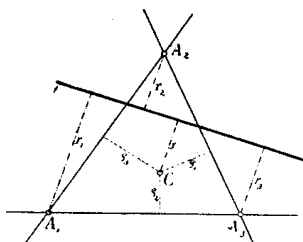
A háromszög súlypontjának koordinátái :

$$x - 1 = \frac{h_1}{3}; \quad x_2 = \frac{h_2}{3}; \quad x_3 = \frac{h_3}{3}.$$

Az $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{3} = 1$ egyenletet érdekessé teszi az a körülmény, hogy vele az x_1, x_2, x_3 koordinátákra vonatkozó nem homogén egyenleteket homogénné lehet tenni.

2. Az egyenes vonal homogén koordinátái. (Homogén vonalkoordináták.)

Ha a koordináta-háromszög három csúcsából a t egyenesre merőlegest ejtünk, továbbá a síkban tetszés szerint valamely C pontot választunk, belőle is a t egyenesre merőlegest ejtünk, és ha a csúcspontokból ejtett merőlegeseknek mértékszámait egyenkint a C pontból ejtett merőlegesnek mértékszámával elosztjuk, akkor a három hányadost az egyenes vonal három homogén koordinátájának tekinthetjük.



18. ábra

Ha az A_1 pont távolságát t -től r_1 -gyel jelöljük,
 " A_2 " " " " r_2 -vel "
 " A_3 " " " " r_3 -mal "

akkor a t egyenes vonal trimetrikus homogén koordinátái:

$$\frac{r_1}{r} = u_1; \quad \frac{r_2}{r} = u_2; \quad \frac{r_3}{r} = u_3.$$

Itt is tekintetbe vesszük az előjelet. Nevezetesen:

u_1 -et pozitívnak vesszük ha A_1 és C a t egyenes ugyanazon oldalán fekszik,
 u_2 -t " " " A_2 " C " " " " "
 u_3 -t " " " A_3 " C " " " " "

ellenkező esetben a koordináták negatív előjelűek.

(A 18. ábrában u_1 és u_3 pozitív; u_2 negatív. Ha a t egyenes nem metszi a koordináta háromszöget és a C pontot a háromszögön belül választjuk, akkor mind a három koordináta pozitív.)

Jelöljük a C pont koordinátáit (távolságait a háromszög oldalaitól, tehát pontkoordináláit) ρ_1 -gyel, ρ_2 -vel, ρ_3 -mal, akkor a koordináta háromszög három oldalának koordinátái:

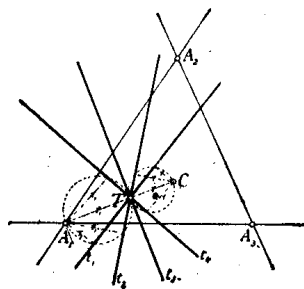
$$\begin{array}{lll} A_2A_3 & \text{oldalé} & u_1 = \frac{h_1}{\rho_1}; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0; \quad \text{mert} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = h_1 \\ r = \rho_1 \end{array} \right\} \\ A_3A_1 & " & u_1 = 0; \quad u_2 = \frac{h_2}{\rho_2}; \quad u_3 = 0; \quad \text{mert} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_2 = h_2 \\ r = \rho_2 \end{array} \right\} \\ A_1A_2 & " & u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = \frac{h_3}{\rho_3}; \quad \text{mert} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_3 = h_3 \\ r = \rho_3 \end{array} \right\} \end{array}$$

*

A különböző helyzetű és irányú egyeneseknek a koordinátái rendszerint különböző értékűek.

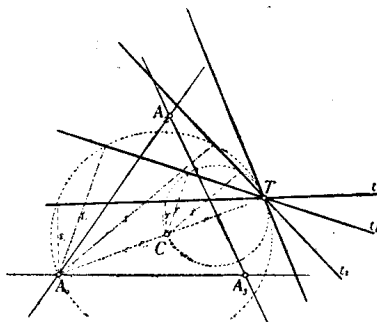
Azonban, ha két vagy több egyenesnek egy közös koordinátája van, ez annak a jele, hogy az egyeneseknek közös pontjuk van. Ha pl. a t_1, t_2, t_3, \dots egyenesek koordinátái közül u_1 közös értékű, akkor a T pont rajta van az A_1 és C pontokat összekötő egyenesen és az A_1C távolságot az $\frac{A_1T}{CT} = \pm u_1$ viszonyban osztja.

Ha a T pont az A_1C távolságon belül fekszik, akkor a koordináta – előjelű (19. ábra).



19. ábra

Ha az A_1C távolságon kívül esik, + előjelű (20. ábra).



20. ábra

Az első esetben az A_1 -ből és a C -ből az egyenesekre ejtett merőlegeseknek talppontjai olyan körökön fekszenek, melyek T -ben kívülről érintkeznek. A második esetben a körök – a talppontok geometriai helyei – belülről érintkeznek.)

Ha a t_1, t_2, t_3, \dots egyeneseknek coordinátái közül u_2 közös, akkor T metszéspontjuk az A_2C egyenesen van. A közös coordináta viszonyszáma $\frac{A_2T}{CT} = \pm u_2$.

Ha végre u_3 közös, akkor a T rajta van az A_3C egyenesen. A viszonyszám $\frac{A_3T}{CT} = \pm u_3$.

Az esetek bármelyikében a t_1, t_2, t_3, \dots egyenesek a T pontot beburkolják. (Enveloppjai a közös metsző pontjuknak.)

Megjegyezhetjük még, hogy mindazoknak az egyeneseknek, melyek a szilárd C ponton áthaladnak, coordinátái:

$$u_1 = \pm\infty, \quad u_2 = \pm\infty, \quad u_3 = \pm\infty.$$

*

Ha a homogén vonalcoordináta-rendszerben is a háromszög kétszeres területét Δ -val jelöljük, akkor valamely egyenes vonal három homogén coordinátáját a következő egyenlettel kapcsolhatjuk össze:

$$g_1\rho_1u_1 + g_2\rho_2u_2 + g_3\rho_3u_3 = \Delta.$$

Tekintettel arra, hogy $g_1h_1 = \Delta$, $g_2h_2 = \Delta$, stb. vagyis $\frac{g_1}{\Delta} = \frac{1}{h_1}$, stb. az egyenletet így is írhatjuk:

$$\frac{\rho_1}{h_1}u_1 + \frac{\rho_2}{h_2}u_2 + \frac{\rho_3}{h_3}u_3 = 1$$

és mondhatjuk, hogy az u_1, u_2, u_3 számok csak abban az esetben homogén coordinátái valamely t egyenesnek, ha ennek a lineáris egyenletnek eleget tesznek.

Különös jelentőséget nyer ez az egyenlet azzal, hogy vele az u_1, u_2, u_3 vonalcoordinátákra vonatkoztatott bárminő fokú nem homogén egyenleteket homogénekké lehet átalakítani.

*

A homogén pont- és vonalcoordináták kölcsönös összefüggéséről nyújtson némi fogalmat a következők párhuzamba állítása.

Azt a föltételt, hogy valamely T pont, valamely t egyenesen van, vagy megfordítva valamely t egyenes valamely T ponton áthalad, a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{1}{h_1}u_1x_1 + \frac{1}{h_2}u_2x_2 + \frac{1}{h_3}u_3x_3 = 0.$$

Ennek az egyenletnek kettős jelentősége van. Jelentősége van úgy pontkoordinátákban, mint vonalkoordinátákban.
Ugyanis:

Ha benne a t egyenes koordinátáit ismerjük, akkor az egyenletet így írhatjuk:

$$\left(\frac{u_1}{h_1}\right)x_1 + \left(\frac{u_2}{h_2}\right)x_2 + \left(\frac{u_3}{h_3}\right)x_3 = 0,$$

vagy rövidebben:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Ez a homogén vonalas egyenlet homogén pontkoordinátákban az egyenes vonalnak az egyenlete.

*

Homogén pontkoordinátákban a másodrendű görbéknek az egyenlete:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Ha benne a T pont koordinátáit ismerjük, akkor az egyenletet így írhatjuk:

$$\left(\frac{x_1}{h_1}\right)u_1 + \left(\frac{x_2}{h_2}\right)u_2 + \left(\frac{x_3}{h_3}\right)u_3 = 0,$$

vagyis rövidebben:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

Ez a homogén vonalas egyenlet homogén vonalkoordinátákban az egyenes pontnak az egyenlete.

*

Homogén vonalkoordinátákban a másodosztályú görbéknek az egyenlete:

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + a_{22}u_2^2 + 2a_{23}u_2u_3 + a_{33}u_3^2 = 0.$$